

MOTI REGOLARI E MOTI CAOTICI

CARLANGELO LIVERANI

1. PRODROMI: DA CESARE A GREGORIO XIII

Il moto per eccellenza nell'antichità era il moto circolare o, che poi è lo stesso, il moto *periodico*: i giorni, i mesi, le stagioni, gli anni. Il problema fondamentale era prevedere. Ad esempio: tra quanti giorni ci sarà il prossimo solstizio d'estate?¹

Come caso emblematico consideriamo il moto di rotazione terrestre (giorni) e il moto di rivoluzione attorno al sole (anno). Sono due moti periodici uno di periodo T_g uguale ad un giorno, l'altro di periodo T_a , un anno.

il rapporto tra i periodi (misurati in giorni) è di²

$$\frac{T_a}{T_g} \sim 365.24218967.$$

questo significa che l'anno tropicale medio è noto con un errore inferiore a 10^{-3} secondi. In realtà questa è una precisione eccessiva per la discussione che segue, assumeremo perciò

$$T_a \sim 365.242189 = 365 + \frac{242189}{1000000}$$

con un errore di circa mezzo decimo di secondo.

La prima cosa utile che si potrebbe fare è cercare di semplificare la frazione ottenendo così il minimo ciclo di anni in cui, entro la precisione considerata, il numero degli anni è un multiplo esatto del numero dei giorni. Questo può essere fatto convenientemente applicando l'algoritmo Euclideo.

1.1. Interludio: l'algoritmo Euclideo. Il problema aperto dalla sezione precedente è quello di ridurre una frazione alla sua forma standard, ovvero *trovare il massimo comun divisore tra due numeri dati*. Questo problema ha una elegante soluzione conosciuta come *algoritmo Euclideo*.

Siano $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, allora esiste $a_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1.1) \quad p = a_1 q + p_1, \quad p_1 < q$$

e

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{p_1}}$$

se q e p_1 hanno un divisore comune (chiamiamolo b) allora anche $b|p$ (da (1.1)) e quindi b è divisore comune di p, q . D'altro canto se $b|p$ e $b|q$ allora $b|p_1$ (questa è

Date: October 24, 2012.

¹Il *solstizio d'estate* è il momento in cui il giorno è il più lungo dell'anno. Nel nostro calendario cade il 21 o il 22 Giugno ed è convenzionalmente considerato l'inizio dell'estate.

²Quello riportato sotto è chiamato *l'anno tropicale medio* ed è quello rilevante per quanto riguarda il calendario, non mi addentrerò qui sulla sua differenza con l'anno *siderale* o altri modi di misurare il periodo.

ancora una volta conseguenza di (1.1)). Dunque p, q hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi lo stesso massimo comun divisore. Poichè

$$q = a_2 p_1 + q_1, \quad q_1 < p_1$$

possiamo scrivere

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{p_1}{q_1}}}$$

dove q_1, p_1 hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi anche di p, q . Questa procedura può essere iterata fino a che non si ottiene un resto nullo. Per esempio se $q_{n-1} = a_{2n} p_n$, cioè $q_n = 0$, allora q_{n-1} e p_n sono entrambi divisibili per p_n e quindi p_n (l'ultimo resto non nullo) è il massimo comun divisore.

Per di più abbiamo ottenuto un'altra maniera univoca di scrivere una frazione chiamata *frazione continua*:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cfrac{\dots}{\cfrac{1}{a_{2n}}}}$$

Esempio 1.1. Si trovi il massimo comun divisore tra $p = 855$ e $q = 266$.

$$855 = 3 \cdot 266 + 57$$

$$266 = 4 \cdot 57 + 38$$

$$57 = 1 \cdot 38 + 19$$

$$38 = 2 \cdot 19.$$

Dunque il massimo comun divisore è 19 e si ha la seguente rappresentazione in frazione continua.

$$\frac{855}{266} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

1.2. Alcune rozze approssimazioni. Applicando l'algoritmo Euclideo al nostro problema si ottiene che il massimo comun divisore è uno e si ha la seguente frazione continua:

$$(1.2) \quad T_a = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{40 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}}}}}}}}}}$$

Questo significa che, nella precisione considerata, bisognerebbe aspettare un milione di anni perchè il numero degli anni sia un multiplo intero del numero dei giorni, cosa

poco utile. D'altro canto possiamo troncare la frazione di cui sopra. Il troncamento più brutale

$$T_a \sim 365$$

era alla base del calendario amministrativo Egiziano composto da dodici mesi e, appunto, 365 giorni. Leggermente meglio è

$$T_a \sim 365 + \frac{1}{4}.$$

Questo suggerisce un ciclo di quattro anni: ogni quattro anni bisogna aggiungere un giorno, cioè ogni quattro anni bisogna avere un anno di 366 giorni, l'anno *bisestile* appunto. Questo è il cosiddetto calendario Giugliano introdotto da Giuglio Cesare nel 46 BC (entrato in vigore nel 45 BC detto anche *l'anno della confusione*) su consiglio dell'astronomo Alessandrino Sosigene il quale si basava sulle conoscenze di quello che è stato forse il più grande astronomo di tutti i tempi: Ipparco da Nicea (190 - 120 BC). Questo corrisponde ad un errore di circa 11 minuti. Sosigene era al corrente dell'esistenza di un errore, ma Cesare lo ritenne accettabile. Tuttavia col tempo tale errore divenne importante, per esempio nel 1500 questo aveva prodotto un errore di circa dieci giorni.

Proviamo una approssimazione migliore per capire meglio che succede

$$T_a \sim 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29}$$

il che da un errore di circa un minuto e suggerisce un ciclo di 29 anni. Quindi un ciclo comune di $4 \times 29 = 116$ anni. Cioè ogni 116 anni ci devono essere 28 extra giorni ma il sistema degli anni bisestili da 29 extra giorni. Una buona soluzione sarebbe di decidere che i secoli non sono bisestili, in questo modo si assume che

$$T_a \sim 365 + \frac{24}{100}$$

con un errore di circa tre minuti.

Ovviamente si può continuare in tale modo, ma ci si può anche chiedere se esiste un modo sistematico di capire come conviene troncare una frazione continua.

1.3. Inderludio: Frazioni continue e loro ridotte. Si consideri una frazione continua

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

con $a_i \in \mathbb{N}$. Un problema naturale è di riscriverla nella forma $\frac{p_n}{p_n}$. Per farlo consideriamo le *ridotte*

$$C_m := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_m}}}$$

per ogni $m \leq n$. Chiaramente

$$(1.3) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{a_1}{1} =: \frac{p_1}{q_1} \implies p_1 = a_1; q_1 = 1 \\ C_2 &= \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} =: \frac{p_2}{q_2} \implies p_2 = a_1 a_2 + 1; q_2 = a_2 \\ C_3 &= \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1} =: \frac{p_3}{q_3} \implies p_3 = a_3 p_2 + p_1; q_3 = a_3 q_2 + q_1 \end{aligned}$$

semberebbe perciò che esista una semplice formula induttiva per calcolare p_i, q_i . Questo è vero e può essere verificato per induzione.

Lemma 1.2. *Per ogni $3 \leq i \leq n$ si ha*

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{aligned}$$

Proof. Per verificare la formula di cui sopra conviene considerare il caso più generale in cui $a_i \in \mathbb{R}_+$. In tale caso le formule (1.3) sono comunque valide anche se ora p_i, q_i non sono necessariamente interi. In questo contesto si può scrivere

$$C_{i+1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i+1}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{\left[\frac{a_i a_{i+1} + 1}{a_{i+1}}\right]}}$$

quindi la seconda frazione ha profondità i e l'ultimo termine è il numero, non necessariamente intero, $\frac{a_i a_{i+1} + 1}{a_{i+1}}$. Applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$C_{i+1} = \frac{\frac{a_i a_{i+1} + 1}{a_{i+1}} p_{i-1} + p_{i-2}}{\frac{a_i a_{i+1} + 1}{a_{i+1}} q_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}}.$$

□

Il prossimo passo è di domandarsi quanto cambia una frazione da un troncamento al successivo.

$$C_{i+1} - C_i = \frac{p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1}}{q_{i+1} q_i}$$

ma, a casua del Lemma 1.2

$$p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = -(q_{i-1} p_{i-2} - p_{i-1} q_{i-2})$$

e, iterando questo calcolo, si ottiene

$$C_{i+1} - C_i = \frac{(-1)^i}{q_{i+1} q_i}.$$

A questo punto basta notare che $q_i \geq q_{i-1}$ e dunque $q_i \geq (a_i + 1) q_{i-2} \geq 2 q_{i-2}$. Dunque $q_i \geq 2^k q_{i-2k}$ cioè

$$|C_n - C_{n-2k}| \leq \sum_{j=0}^{2k-1} |C_{n-j} - C_{n-j+1}| \leq \sum_{j=0}^{2k-1} 2^{-\frac{j}{2}} \frac{1}{q_{n-2k}^2} \leq C \frac{1}{q_{n-2k}^2}.$$

La differenza tra una troncata e la frazione originaria è dell'ordine di uno sul quadrato del denominatore. Questa è una approssimazione particolarmente buona per un numero dato ed un dato denominatore, non banale da ottenere.³

Si noti infine che nelle stime precedenti si è usato solamente l'ipotesi $a_i > 0$. Chiaramente se un a_i è grande l'approssimazione data dalla corrispondente frazione continua risulta molto più accurate di quanto sopra stimato.

1.4. Una approssimazione più sofisticata. Se guardiamo la frazione (1.2) notiamo che ad un certo punto compare il numero, relativamente grande, 40. In base a quanto discusso, questo è un buon punto dove troncare la frazione:

$$T_a \sim 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128}$$

che da un errore di circa due decimi di secondo e suggerisce un ciclo di 128 anni. Si tratterebbe cioè di non rendere bisestili gli anni divisibili per 128. Questo forse non è uno schema molto proponibile perchè richiede una certa sofisticazione matematica per decidere se l'anno è bisestile oppure no (una divisione con numeri di tre cifre!). Come surrogato si può notare che $128 \times 3 = 384$ dunque in circa quattrocento anni il nostro schema precedente sopprimerebbe quattro anni bisestile mentre ora vediamo che ne dovremmo sopprimere solo tre. Una semplice possibilità è di mantenere bisestili i secoli divisibili per quattro. Questo è il calendario Gregoriano, correntemente in uso. Esso fu introdotto da Papa Gregorio XIII il 24 Febbraio 1582 (anche se la bolla *Inter gravissimas* è datata 1581 perchè al tempo l'anno cominciava a Marzo) sembra su proposta del Calabrese Luigi Lilio e realizzato sotto la tutela del noto astronomo Christopher Clavius.⁴ Dunque il calendario Gregoriano corrisponde ad un anno

$$T_a \sim 365 + \frac{97}{400}$$

³L'approssimazione banale di un numero razionale con una frazione di denominatore q da un errore dell'ordine $\frac{1}{q}$, a meno che non dia il risultato esatto. La possibilità di usare frazioni continue per ottenere buone approssimazioni fu infatti usata, all'inizio dello sviluppo della teoria, da Christian Huygens (1629-1695) per progettare le ruote dentate dei planetari (si veda l'opera postuma: *Descriptio Automati Planetari* 1698).

⁴Contestualmente furono saltati 10 giorni per riallineare il calendario provocando un certo sconcerto e accuse alla chiesa di "rubare dieci giorni dalla vita delle persone".

con un errore di circa mezzo minuto ovvero circa tre ore ogni quattrocento anni,⁵ dunque avremo un errore maggiore di un giorno attorno al 5000, sempre se saremo ancora in giro.⁶

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY, liverani@mat.uniroma2.it

⁵Un errore circa 300 volte maggiore dello schema basato su di un ciclo di 128 anni.

⁶In realtà tutta questa discussione è alquanto accademica in quanto il moto terrestre non è veramente costante come supposto. Questo dipende da varie cause la più importante essendo probabilmente l'effetto di marea provocato dalla luna che tende a rallentare la rotazione terrestre, quindi ad accorciare il girono. Tale effetto, su una scala di 5000 anni, sarebbe più importante dello sfasamento qui discusso. Da questo fatto si ricava un'utile lezione per l'applicazione della matematica: tali applicazioni sono sempre basate su modelli che, come tali, hanno un ambito di applicabilità ben definito. Se ci si lascia trasportare dall'entusiasmo matematico senza riflettere si rischia di finire con lo studiare effetti così sottili da essere in realtà al di fuori dell'applicabilità del modello e dunque di discutibile interesse per quanto riguarda le applicazioni.