LA TEORIA DEL COMMUTATORE IN ALGEBRA GENERALE

Paolo Lipparini
(ottobre 2003)

a) Brevi cenni sulla teoria del commutatore

In questa sezione si accenna brevemente ad alcuni sviluppi recenti in Algebra Generale, preliminari per la discussione dei contributi dello studioso nel campo. L'esposizione ricalca essenzialmente l'introduzione del lavoro **[10]**, pubblicato su una rivista rivolta ad un pubblico generale di algebristi.

L'Algebra Generale (chiamata più spesso ma impropriamente Algebra Universale) si occupa dello studio delle strutture algebriche in generale, cioè senza porre limiti al numero di operazioni e al numero dei loro argomenti. A prima vista si potrebbe supporre che in un contesto talmente ampio sia difficile ottenere risultati significativi, e si potrebbe allo stesso modo supporre che esistano veramente poche interazioni fra l'Algebra Generale e le strutture algebriche più studiate, quali i Gruppi, gli Anelli, i Moduli etc. etc.

Tuttavia, non sempre è stato così. Nell'introduzione di **[10]** si presentano alcuni esempi non banali. Fra questi esempi, quello che ha costituito la motivazione per un grande numero di ricerche è la generalizzazione del concetto di commutatore.

È ben noto che le due operazioni di (a) commutatore fra due sottogruppi normali di un gruppo e (b) prodotto di ideali in un anello commutativo soddisfano essenzialmente alle stesse proprietà formali (anche se le notazioni usate sono differenti: vedi la tabella seguente, sempre tratta da **[10]**). In maniera assolutamente inaspettata J. D. H. Smith (*Mal'cev varieties*, Lecture Notes in Mathematics 554, Springer-Verlag 1976) ha dimostrato che quelle stesse proprietà formali valgono per una classe molto ampia di strutture algebriche (tecnicamente, le strutture appartenenti ad un varietà a congruenze permutabili).

Notion or law	α, β, γ congruences of a general algebra	M, N, P normal subgroups of a group	I, J, K ideals of a commutative ring
Join	$\alpha + \beta$ (or $\alpha \vee \beta$)	MN	$I + J$
Meet or intersection	$\alpha\beta$ (or $\alpha \wedge \beta$ or $\alpha \cdot \beta$)	$M \cap N$	$I \cap J$
Modular (or Dedekind) law	$\alpha(\beta + \gamma) \leq \beta + \alpha\gamma$ if $\beta \leq \alpha$	$M \cap NP \leq N(M \cap P)$ if $N \leq M$	$I \cap (J + K) \leq J + (I \cap K)$ if $J \leq I$
Commutator	$[\alpha, \beta]$	$[M, N]$	IJ
Distributivity of commutator	$[\alpha, \beta + \gamma] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma]$	$[M, NP] = [M, N][M, P]$	$I(J + K) = IJ + IK$
Commutativity of commutator	$[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$	$[M, N] = [N, M]$	$IJ = JI$
Submultiplicativity	$[\alpha, \beta] \leq \alpha\beta$	$[M, N] \leq M \cap N$	$IJ \leq I \cap J$
Define (cyclically modulo 3):	$\gamma_i = (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})(\beta_{i+1} + \beta_{i+2})$	$P_i = (M_{i+1}M_{i+2}) \cap (N_{i+1}N_{i+2})$	$K_i = (I_{i+1} + I_{i+2}) \cap (J_{i+1} + J_{i+2})$
Then the Arguesian law reads	$(\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) \leq \alpha_1(\gamma_0(\gamma_1 + \gamma_2) + \alpha_2) + \beta_1$	$M_0N_0 \cap M_1N_1 \cap M_2N_2 \leq N_1(M_1 \cap ((P_0 \cap P_1P_2)M_2))$	$(I_0 + J_0) \cap (I_1 + J_1) \cap (I_2 + J_2) \leq I_1 \cap (K_0 \cap (K_1 + K_2) + I_2) + J_1$

Nel caso di una struttura algebrica generale, alla nozione di sottogruppo normale o di ideale corrisponde quella di congruenza, cioè di nucleo di un omomorfismo, pensato come relazione di equivalenza. La teoria di Smith ha reso possibile l'uso di metodi e nozioni, quali "abeliano", "risolubile", "nilpotente", che sembravano applicabili solo nel caso dei gruppi o degli anelli. Questa teoria si è presto dimostrata di una utilità eccezionale nel risolvere molti problemi aperti, nell'ottenere importanti generalizzazioni di risultati noti, nel semplificare notevolmente certe dimostrazioni, oltreché nel produrre teoremi completamente nuovi (vedi, oltre al libro di Smith, H. P. Gumm, *Geometrical Methods in Congruence Modular Algebras*, AMS Memoirs 286, 1983 e R. Freese, R. McKenzie, *Commutator Theory for Congruence Modular Varieties,* London Mathematical Society Lecture Notes 125, Cambridge University Press, 1987).

Non ci si è soffermati sulla definizione precisa della condizione cui devono soddisfare le strutture affinché si possa applicare la teoria sviluppata da Smith poiché pochi anni dopo J. Hagemann e C. Herrmann, in modo forse ancor più inaspettato, sono riusciti a generalizzare la teoria ad un ambito ancora più vasto, quello delle strutture appartenenti ad una varietà a congruenze modulari (una *varietà* è semplicemente una classe di strutture chiusa rispetto alle operazioni di prodotto, sottostruttura e immagine omomorfa; la *legge modulare* non è altro che la traduzione della legge di Dedekind valida per sottogruppi normali di un gruppo o per ideali di un anello commutativo). H. P. Gumm è riuscito poi a semplificare e a migliorare ulteriormente questa teoria.

Le introduzioni di **[3]** e **[10]** contengono un'esposizione più dettagliata degli sviluppi sopra descritti, insieme agli ulteriori opportuni riferimenti bibliografici.

b) Contributi dello studioso alla teoria del commutatore: il caso non modulare

Il lavoro **[3]** prende le mosse da questo stato delle cose. Probabilmente, a quel tempo, la maggior parte degli studiosi nel campo erano già abbastanza stupefatti dall'ambito così ampio in cui la teoria del commutatore era applicabile, da credere addirittura inimmaginabile una sua ulteriore estensione. In effetti in **[3]** si dimostra che, se non vale l'assunzione della modularità, alcune proprietà del commutatore vanno necessariamente perse. Ma questo risultato negativo è largamente compensato da una mole notevole di risultati positivi ottenuti in **[3]**. Infatti, la proprietà distributiva, che a prima vista sembrerebbe la proprietà irrinunciabile nelle applicazioni, si rivela inessenziale: quasi tutti i risultati la cui dimostrazione fa uso di questa proprietà possono venire dimostrati senza! Il prezzo da pagare è naturalmente una maggiore complessità delle dimostrazioni, ma l'importante è che i risultati continuino a valere e, soprattutto, che l'unica ipotesi di cui si fa uso, l'esistenza di un *termine-differenza debole*, vale, essenzialmente, per tutte le strutture algebriche che sono non banali, in un senso che si può definire rigorosamente.

Infatti, la teoria sviluppata in **[3]** è applicabile non solo a tutte le strutture appartenenti ad una varietà a congruenze modulari (quindi, ad esempio, gruppi, anelli, moduli, quasigruppi, reticoli), ma anche a semireticoli, alcuni semigruppi (in particolare, gli "inverse semigroups"), a strutture neutrali (quelle che soddisfano ad $[\alpha,\alpha]=\alpha$), a varietà n-permutabili (vedi la sezione *d*) e a varietà localmente finite che "omettono" il tipo **1**, nel senso di D. Hobby and R. McKenzie (vedi più sotto). Inoltre, usualmente, l'Algebra Generale si limita a studiare strutture appartenenti a varietà soddisfacenti a determinate proprietà: per ottenere risultati significativi è solitamente necessario supporre che una certa proprietà valga per tutte le strutture appartenenti ad una varietà, piuttosto che per una singola struttura. Invece in **[3]** è sufficiente che il *termine-differenza debole* sia presente in una singola struttura, senza ulteriori ipotesi da richiedere alla varietà cui questa struttura appartiene (vedi p. 179 di **[3]**). Per inciso, esistono comunque caratterizzazioni interessanti delle varietà le cui strutture hanno tutte un *termine-differenza debole*: esse sono state ottenute nei lavori **[7], [8]**, dove vengono anche caratterizzate le varietà neutrali (quest'ultima caratterizzazione è stata in seguito utilizzata in vari lavori di R. Willard e altri, ad esempio: R. Willard, *A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semidistributive varieties,* J. Symb. Logic 65 (1), 2000; e K. Kearnes, R. Willard, R*esidually finite congruence meet-semidistributive varieties of finite type have a finite residual bound,* Proceedings AMS 127, 2841-2850).

I risultati di **[3]** riguardano permutabilità di congruenze, conseguenze dell'abelianità e della risolubilità, relazioni tra identità soddisfatte da congruenze, con e senza commutatore. Soprattutto, la forma del reticolo delle congruenze di una struttura algebrica ha notevole influsso sul comportamento delle operazioni della struttura (il prototipo dei risultati è l'esempio che se M_3 è un sottoreticolo del reticolo dei sottogruppi normali di un gruppo, allora il gruppo è abeliano); in questa direzione, certi reticoli implicano l'abelianità, certi altri la non abelianità, e molti reticoli non possono essere reticoli delle congruenze di strutture con un *termine-differenza debole*.

Durante gli anni '80 D. Hobby and R. McKenzie (*The structure of finite algebras*, Contemp. Math. 76, AMS 1988) hanno ottenuto una teoria estremamente dettagliata sulle varietà localmente finite (quelle in cui ogni struttura finitamente generata è finita), classificandole a seconda dei "tipi" che "omettono". Le varietà localmente finite con un *termine-differenza debole* hanno una ben precisa caratterizzazione in questo senso: sono esattamente quelle che "omettono" il tipo **1**: i risultati di **[3]** non solo, per la maggior parte, sono nuovi anche nel caso particolare e già molto studiato delle varietà localmente finite, ma addirittura valgono anche senza nessuna ipotesi di finitezza!

c) Contributi dello studioso alla teoria del commutatore: il caso modulare.

Sebbene originariamente l'interesse dello studioso si fosse rivolto all'estensione della teoria al caso più generale (non modulare), anche perché la teoria modulare sembrava già sufficientemente completa, in seguito è riuscito ad applicare la teoria del commutatore per ottenere nuovi risultati e semplici dimostrazioni per risultati classici nel caso di varietà a congruenze modulari.

Nel lavoro **[10]** si ottiene una dimostrazione particolarmente semplice di un risultato precedentemente ottenuto da R. Freese and B. Jonsson: se tutte le strutture di una varietà hanno il reticolo di congruenze modulare, allora questi reticoli soddisfano ad identità ancora più forti, come l'identità arguesiana (questa identità ha anche un significato geometrico: il reticolo dei sottospazi di una geometria proiettiva è arguesiano se e solo se, in quanto geometria, soddisfa al teorema di Desargues). Per inciso, anche i casi particolari di questo risultato per i gruppi e gli anelli sembrano essere stati dimostrati per la prima volta in ambito generale da Jonsson.

Identità ancora più forti sono ottenute in [21] e [22]. Un risultato simile, riguardante questa volta, però, identità più deboli della modularità è ottenuto in **[12]** (**[12]** sembra essere in assoluto il primo risultato di questo tipo riguardante identità strettamente più deboli della modularità).

Tornando a **[10]**, è comunque da notare che alcuni risultati riguardano strutture con un *termine-differenza*, o anche solo con un *termine-differenza debole*, senza bisogno di assumere la modularità e, come in altri casi, è sufficiente assumere l'esistenza del *termine-differenza* per una struttura singola, anziché per una varietà.

Anche in [9], [16] e [22] si ottengono dimostrazioni più semplici e generalizzazioni di risultati precedentemente ottenuti da altri autori.

d) Ulteriori contributi: varietà n-permutabili.

Due relazioni di equivalenza R e S si dicono *permutabili* se R∘S =S∘R, dove ∘ indica la composizione di relazioni. Più in generale, R e S si dicono n-*permutabili* se R∘S∘R...=S∘R∘S... (dove ∘ appare n-1 volte in ciascun membro). La caratterizzazione data da Mal'cev negli anni '50 delle varietà di strutture algebriche permutabili si può considerare senza ombra di dubbio l'inizio dell'Algebra Generale moderna.

La studio della nozione di n-permutabilità, se in origine poteva sembrare giusto un'esercitazione di tipo accademico priva di interesse sostanziale, si sta invece rivelando di notevole importanza. Infatti le varietà localmente finite n-permutabili hanno una semplice descrizione nella menzionata teoria di Hobby e McKenzie: sono esattamente le varietà che "omettono" i tipi **1,4** e **5**. Inoltre Hobby e McKenzie forniscono altre caratterizzazioni semplici ed interessanti, e si avvicinano ad ottenere teoremi di struttura per membri di tali varietà; in particolare dimostrano che per ogni varietà n-permutabile esiste un'uguaglianza nel linguaggio dei reticoli soddisfatta da tutte le strutture della varietà.

In **[4]** lo studioso dimostra il risultato per varietà qualunque, senza bisogno di ipotesi di finitezza, risultato che all'epoca ha sorpreso parecchio (vedi R. Freese, *Alan Day's early work: congruence identities*, Algebra Universalis 34, 4-23, 1995), sia per la sua dimostrazione molto semplice, sia perché non si riteneva possibile estendere in questo senso i risultati di Hobby e McKenzie. I lavori **[3]** e **[4]** hanno anticipato alcune linee di ricerca attuali di quasi un decennio. Inoltre, le identità di **[4]** dipendono solo da n, non dalla varietà presa in considerazione.

Ulteriori identità sono state trovate in **[20]** e [23]; quest'ultimo è particolarmente interessante perchè la dimostrazione non fa uso della teoria del commutatore.

Elenco delle pubblicazioni.

a) Articoli pubblicati su riviste estere

[1] Duality for compact logics and substitution in abstract model theory. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 31 (1985), n. 6, 517-532.

[2] Limit ultrapowers and abstract logics. *J. Symbolic Logic* 52 (1987), n. 2, 437-454.

[3] Commutator theory without join-distributivity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 346 (1994), n. 1, 177-202.

[4] n-permutable varieties satisfy nontrivial congruence identities. *Algebra Universalis* 33 (1995), n. 2, 159-168.

[5] Productive [λ,μ]-compactness and regular ultrafilters. *Topology Proc.* 21 (1996), 161-171.

[6] Ultrafilter translations. I. (λ,λ)-compactness of logics with a cardinality quantifier. *Arch. Math. Logic* 35 (1996), n. 2, 63-87.

[7] A characterization of varieties with a difference term. *Canad. Math. Bull.* 39 (1996), n. 3, 308-315.

[8] A characterization of varieties with a difference term. II. Neutral=meet semi-distributive. *Canad. Math. Bull.* 41 (1998), n. 3, 318-327.

[9] A Kiss 4-difference term from a ternary term. *Algebra Universalis* 42 (1999), 153-154.

[10] Congruence modularity implies the Arguesian law for single algebras with a difference term. *J. Algebra* 219 (1999), 658-681.

[11] Every (λ^+,κ^+)-regular ultrafilter is (λ,κ)-regular. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 605-609.

[12] A non-trivial congruence implication between identities weaker than modularity. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 68 (2002), 593-609.

b) Articoli pubblicati su riviste nazionali

[13] Existentially complete closure algebras. *Boll. Un. Mat. Ital.* D (6) 1 (1982), n. 1, 13-19.

[14] Locally finite theories with model companion. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 72 (1982), n. 1, 6-11.

[15] Some results about compact logics. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 72 (1982), n. 6, 308-311.

[16] An application of commutator theory to incidence algebras. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 76 (1984), n. 2, 85-87.

[17] Robinson equivalence relations through limit ultrapowers. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (6) 4 (1985), n. 2, 569-583.

[18] Consequences of compactness properties for abstract logics. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 80 (1986), n. 7-12, 501-503.

[19] The compactness spectrum of abstract logics, large cardinals and combinatorial principles. *Boll. Un. Mat. Ital*. B (7) 4 (1990), n. 4, 875-903.

[20] Congruence identities satisfied in n-permutable varieties. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 8(1994), n. 4, 851-868.

1.2.3 Preprint[1]

[21] Optimal Mal'tsev conditions for congruence modular varieties (in collaborazione con G. Czedli e E. Horvath), sottoposto ad *Algebra Universalis*.

[22] Finitely based congruence varieties (in collaborazione con R. Freese).

[23] An elementary proof that n-permutable varieties satisfy identities.

[24] More on regular ultrafilters in ZFC, in corso di revisione per *Mathematical Logic Quarterly*.

[1] Scaricabili (eccetto [22]) dal sito internet **http://www.mat.uniroma2.it/~lipparin**.