DISCUSSIONE DI ESERCIZI CON PARAMETRI

In alcuni tipi di esercizi si richiede la discussione relativa ad un parametro, che può variare in un certo insieme (ad esempio, **R**). Ciò significa che la risposta all'esercizio varia al variare dei valori del parametro. Effetuata la risoluzione dell'esercizio, bisogna pertanto presentare uno specchietto in cui si riassumono le conclusioni, qualcosa del tipo:

Per i valori del parametro ... la risposta è ...
Per i valori del parametro ... la risposta è ...
Per i valori del parametro ... la risposta è ...

È importante che, nella discussione, **si considerino tutti i casi,** cioè si considerino tutti i valori possibili che il parametro può assumere (questo va desunto dal testo dell'esercizio!), e inoltre sarebbe opportuno evitare casi ridondanti (cioè evitare di considerare due volte lo stesso valore del parametro).

Ad esempio, consideriamo il seguente esercizio:

Dire per quali valori di $h \in \mathbf{R}$ l'equazione $(h^2 - 1)x = 1$ ammette soluzione.

Una risposta del tipo:

Se $h = 1$ l'equazione non ammette soluzione;
se $h = -1$ l'equazione non ammette soluzione;
se $h = 0$ l'equazione ammette la soluzione $x = -1$;

non contiene affermazioni errate, ma **è incompleta**, poichè non si dice cosa succede per tutti gli altri valori di $h \in \mathbf{R}$. La risposta completa è:

Se $h = 1$ l'equazione non ammette soluzione;
se $h = -1$ l'equazione non ammette soluzione;
per tutti gli altri valori di $h \in \mathbf{R}$ [cioè $h \in \mathbf{R}$, $h \neq 1$ e $h \neq -1$] l'equazione ammette soluzione (la soluzione è $x = \frac{1}{h^2-1}$, ma il testo dell'esercizio non richiedeva questo! Non è inappropriato ricordarsi sempre di leggere bene il testo dell'esercizio, e di rispondere alle domande effettivamente poste dall'esercizio).

Supponiamo adesso di stare discutendo un sistema.
Una risposta del tipo:

Se $h = 1$ il sistema ammette soluzione;
se $h \neq 2$ il sistema non ammette soluzione.

è comunque incompleta (poichè il caso $h = 2$ non viene discusso), ma **è sicuramente sbagliata** poichè il caso $h = 1$ viene considerato due volte, e con conclusioni che si contraddicono. Nella prima riga della risposta si afferma che se $h = 1$ il sistema ammette soluzione; mentre nella seconda riga si afferma che se $h \neq 2$ (e, quindi, anche nel caso particolare $h = 1$) il sistema non ammette soluzione.

È sempre fondamentale controllare in quale insieme il parametro può variare! Ad esempio si consideri l'esercizio:

Dire per quali valori di $h \in \mathbf{R}$ l'equazione $(h^2 + 1)x = 1$ ammette soluzione.

Poichè h è reale, $h^2 + 1 > 0$ per qualunque valore di h, quindi l'equazione ammette sempre soluzione.

Se invece l'esercizio avesse chiesto:

Dire per quali valori di $h \in \mathbf{C}$ l'equazione $(h^2 + 1)x = 1$ ammette soluzione.

N.B.: **R** è stato sostituito da **C**.

In tal caso, per $h = i$ ed $h = -i$ si ha $h^2 + 1 = 0$, quindi l'equazione non ammette soluzione. Per tutti gli altri valori di $h \in \mathbf{C}$ l'equazione ammette (una e una sola) soluzione.

Quanto detto fino ad adesso vale anche nel (deprecabile?) caso di discussione in cui siano presenti due parametri contemporaneamente: **bisogna trattare tutti i casi**, e, se possibile, evitare di trattare due volte lo stesso caso o, se questo succede, essere almeno coerenti.

Ad esempio, provate a risolvere il seguente esercizio:

Determinare, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione (x varia in **R**): $ax = b$.

Oppure:

Determinare, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione: $(a^2 - 1)x = (a - 1)b^2$.