Capitolo settimo

Spazi normali e spazi di Tychonoff

1. Il lemma di Urysohn

I teoremi 1.1 e 2.1 forniscono due condizioni, ciascuna delle quali equivale ad entrambe le proprietà 1), 2) — a loro volta equivalenti — del lemma 5.1 del capitolo terzo.

Teorema 1.1 (*lemma di Urysohn*). *Per uno spazio topologico X sono fatti equivalenti*:

a) *se F è un qualsiasi chiuso non vuoto di X, ogni intorno U di F contiene un intorno chiuso di F;*

b) *se F_0 e F_1 sono due chiusi disgiunti di X, esiste una funzione continua $f\colon X \to I$ $(I = [0, 1])$ tale che:*

(1) $$f(x) = 0 \quad \textit{se } x \in F_0; \; f(x) = 1 \quad \textit{se } x \in F_1.$$

Dimostrazione. Mostriamo che b) $\Rightarrow$ a). Sia F_0 un chiuso di X ed U un intorno di F_0. Esiste un aperto A tale che $F_0 \subset A \subset U$. Ne segue che F_0 e $F_1 = \complement A$ sono due chiusi disgiunti di X. Per ipotesi esiste una funzione continua $f\colon X \to I$ che ha la proprietà (1). Siccome $[0, 1/2]$ è un intorno chiuso di $f(F_0) = \{0\}$ che è disgiunto da $f(F_1) = \{1\}$, il sottoinsieme di X, $V = f^{-1}([0, 1/2])$ è un intorno chiuso di F_0 che è disgiunto da $F_1 = \complement A$. Ne segue che $V = \bar{V} \subset A \subset U$.

Mostriamo che a) $\Rightarrow$ b). Sia I^* il sottoinsieme degli elementi q di I del tipo $m/2^n$ con m, n numeri naturali e $0 \leq m \leq 2^n$. I^* è denso in I, ossia, dati $x, y \in I$ con $x < y$, esiste $q \in I^*$ tale che $x < q < y$.

Sia infatti $n \in \mathbf{N}$ tale che $\dfrac{1}{2^n} < y - x$; esiste $m \in \mathbf{N}$ con $0 < m < 2^n$ tale che $\dfrac{m-1}{2^n} \leq x < \dfrac{m}{2^n} < y$.

Dimostriamo che ad ogni $q \in I^*$ possiamo associare un aperto $U(q)$ di X tale che

(2) $$F_0 \subset U(q); \; U(q) \cap F_1 = \emptyset \text{ per ogni } q \in I^*;$$

(3) $$q', q'' \in I^*, \; q' < q'' \Rightarrow \overline{U(q')} \subset U(q'').$$

Poniamo $I_n^* = \{m/2^n\} \mid 0 \leq m \leq 2^n\}$; I_{n-1}^* è il sottoinsieme degli elementi $m/2^n$ di I_n^* per i quali m è pari ed $I^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n^*$.

Costruiamo, per ricorrenza su n, $\mathfrak{D}_n = \{U(q)\}_{q \in I_n^*}$. Osserviamo anzitutto che $\mathfrak{D}_{n-1} \subset \mathfrak{D}_n$ e che una volta costruito $\mathfrak{D}_{n-1}$, gli elementi $U(m/2^n)$ di $\mathfrak{D}_n$ da determinare sono quelli per i quali m è dispari.

Costruiamo prima di tutto $\mathfrak{D}_0 = \{U(0), U(1)\}$, ponendo $U(1) = \complement F_1$ e scegliendo $U(0)$ nel modo seguente: siccome $F_0 \subset U(1)$, esiste per a) un intorno chiuso V di F_0 contenuto in $U(1)$. Poniamo $U(0) = V$, dopo di che:

(4) $$F_0 \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U(1) = \complement F_1.$$

Una volta costruito $\mathfrak{D}_0$, l'unico elemento da costruire di $\mathfrak{D}_1$ è $U\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Segue da a) che possiamo trovare un aperto $U\left(\dfrac{1}{2}\right)$ tale che $\overline{U(0)} \subset U\left(\dfrac{1}{2}\right) \subset \overline{U\left(\dfrac{1}{2}\right)} \subset U(1)$. Dunque la famiglia $\mathfrak{D}_1$ ha le proprietà (2), (3), ossia

$$F_0 \subset U(0) \subset \bar{U}(0) \subset U\left(\frac{1}{2}\right) \subset \overline{U\left(\frac{1}{2}\right)} \subset U(1) = \complement F_1.$$

Supponiamo di aver costruito la famiglia $\mathfrak{D}_{n-1} = \{U(q)\}_{q \in I_{n-1}^*}$ di aperti in guisa tale che valgano le (2), (3) per ogni

$$q, q', q'' \in I_{n-1}^* = \left\{\frac{m}{2^{n-1}} \mid 0 \leq m \leq 2^{n-1}\right\}.$$

Gli elementi da costruire di $\mathfrak{D}_n$ sono gli aperti $U\left(\dfrac{2m+1}{2^n}\right)$ per $0 \leq m \leq 2^{n-1}$.

Tenuto conto di a), possiamo trovare, per ogni m tale che $0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}$, un aperto $U\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)$ tale che

$$\overline{U\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)} \subset U\left(\frac{2m+1}{2^n}\right) \subset \overline{U\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)} \subset U\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right).$$

$\mathfrak{D}_n = \{U(q)\}_{q \in I_n^*}$ è una famiglia di aperti per la quale sono verificate le (2), (3) per $q, q', q'' \in I_n^*$.

Abbiamo dunque costruito, per ricorrenza su n, $\mathfrak{D}_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. La famiglia di aperti $\mathfrak{D} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{D}_n = \{U(q)\}_{q \in I^*}$ ha le proprietà (2), (3), come risulta dal fatto che $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_{n+1}$ e quindi $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_m$ per ogni n, $m \in \mathbf{N}$ tali che $n < m$.

L'applicazione f: $X \to I$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \text{Inf.}\, \{q \in I^* \mid x \in U(q)\} & \text{se } x \in U = \bigcup_{q \in I^*} U(q) \\ 1 \quad \text{se } x \notin U, \text{ ossia se } x \notin U(q) \text{ per ogni } q \in I^*. \end{cases}$$

ha le proprietà (1).

Sia $x \in X$, $q \in I^*$. Per il modo in cui è definita f, si ha

(4) $\qquad f(x) < q \Rightarrow x \in U(q); \quad x \in U(q) \Rightarrow f(x) \leqslant q.$

Dimostriamo che:

(5) $\qquad f(x) > q \Rightarrow x \notin \overline{U(q)}; \quad x \notin \overline{U(q)} \Rightarrow f(x) \geqslant q.$

Sia $q' \in I^*$ tale che $q < q' < f(x)$; dalla seconda delle (4) segue $x \notin U(q')$. Per le (3) si ha $\overline{U(q)} \subset U(q')$ e quindi $x \notin \overline{U(q)}$. Dimostriamo per assurdo la seconda delle (5); se $f(x) < q$, dalla prima delle (4) segue $x \in U(q) \subset \bar{U}(q)$ e ciò è assurdo.

Dimostriamo infine che f è continua in ogni punto $x_0 \in X$. Distinguiamo tre casi:

1) $0 < f(x_0) < 1$. Sia $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ un intorno di $f(x_0)$. Esistono q_1, $q_2 \in I^*$ tali che

$$f(x_0) - \varepsilon < q_1 < f(x_0) < q_2 < f(x_0) + \varepsilon.$$
$$V = U(q_2) - \overline{U(q_1)} = U(q_2) \cap \complement\overline{U(q_1)}$$

è un aperto di X. Per la prima delle (4), (5), V è un intorno di x_0.

Per la seconda delle (4), (5), $f(V) \subset [q_1, q_2] \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, e quindi f è continua in x_0.

2) $f(x_0) = 0$. Sia $[0, \varepsilon[$ un intorno di x_0. Esiste $q \in I^*$ tale che $0 < q < \varepsilon$.

Per la prima delle (4), $U(q)$ è un intorno di $f(x_0)$. Per la seconda delle (4), $f(U(q)) \subset [0, q] \subset [0, \varepsilon[$, e quindi f è continua in x_0.

3) $f(x_0) = 1$. Sia $]\varepsilon, 1]$ un intorno di $f(x_0)$. Esiste $q \in I^*$ tale che $\varepsilon < q < 1$. Per la prima delle (5), $V = \complement\bar{U}(q)$ è un intorno di x_0. Per la seconda delle (5), $f(V) \subset [q, 1] \subset]\varepsilon, 1]$, e quindi f è continua in x_0. **Q.E.D.**

Corollario 1.2. *Sia X uno spazio normale. Se F_0 e F_1 sono due chiusi non vuoti e disgiunti di X, esiste una funzione continua $f : X \to I$ tale che:*

$$f(x) = 0 \quad \textit{se } x \in F_0; \; f(x) = 1 \quad \textit{se } x \in F_1.$$

In generale la funzione costruita nel teorema 1.1 assume i valori 0 ed 1 anche fuori di F_0 e F_1.

Spesso è utile poter costruire una funzione continua f: $X \to I$ tale che $f^{-1}(0) = F_0$, $f^{-1}(1) = F_1$.

Il lemma seguente dà un criterio perché ciò sia possibile.

Lemma 1.3. *Sia X uno spazio normale, F_0, F_1 due chiusi di X non vuoti e disgiunti. Supponiamo esistano due successioni di aperti $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$; $\{V_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ tali che $F_0 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n$, $F_1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n$. In queste ipotesi esiste una funzione continua f: $X \to I$ tale che $f^{-1}(0) = F_0$, $f^{-1}(1) = F_1$.*

Dimostrazione. Lo spazio X è T_4; quindi gli intorni chiusi di F_1 sono un sistema fondamentale di intorni di F_1. Si può dunque supporre che sia $F_1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \bar{V}_n$.

Usando le notazioni del teorema 1.1 si considerino per $n > 2$ gli insiemi

$$U'\left(\frac{1}{2^n}\right) = U\left(\frac{1}{2^n}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i\right)$$

$$U'\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = U\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\complement \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{V}_i\right]$$

$U'(q) = U(q)$ per $q \in I^*$ e $q \neq \frac{1}{2^n}$, $q \neq 1 - \frac{1}{2^n}$, quando $n > 2$.

La famiglia di aperti $\mathfrak{D}' = \{U'(q)\}_{q \in I^*}$ ha le proprietà (2), (3) e la funzione f costruita a partire da $\mathfrak{D}'$ soddisfa alle proprietà richieste dal lemma.

Q.E.D.

Lemma 1.4. *Sia X uno spazio T_3, soddisfacente al secondo assioma di numerabilità; allora per ogni chiuso F di X esiste una successione di aperti $\{V_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ tale che $F = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n$.*

Dimostrazione. Per ogni punto $x \in \complement F$ esiste un aperto $U_x \ni x$, tale che $\bar{U}_x \cap F = \emptyset$. Siccome X soddisfa al secondo assioma di numerabilità, per il teorema di Lindelöff, il ricoprimento aperto $\{U_x\}_{x \in \complement F}$ di $\complement F$ ammette un sottoricoprimento numerabile $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$.

Poniamo $V_n = \complement[\bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i]$. Siccome $\bar{U}_i \cap F = \emptyset$, V_n è un aperto contenente F. Se $x \in \complement F$, esiste $n \in \mathbf{N}^*$ tale che $x \in U_n$; ne segue che $x \notin V_n$ e quindi $x \notin \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n$. Ciò prova che $F = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n$. Q.E.D.

Dai lemmi 1.3 ed 1.4 segue il

Corollario 1.5. *Sia X uno spazio T_3, soddisfacente al secondo assioma di numerabilità. Per ogni coppia di chiusi disgiunti, non vuoti F_0, F_1 di X esiste un'applicazione continua $f\colon X \to I$ tale che:*

$$f(x) = 0 \ \textit{se, e soltanto se,}\ x \in F_0$$

$$f(x) = 1 \ \textit{se, e soltanto se,}\ x \in F_1.$$

Esempi

[1.1] Uno spazio metrico (X, d) è uno spazio normale che ha la proprietà espressa nell'ipotesi del lemma 1.3. Basta osservare che, se F è un chiuso di X,

$$V_n = \left\{x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{n}\right\} \text{ per } n \in \mathbf{N}^*$$

è un aperto di X ed inoltre $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n = F$.

[1.2] Sia X uno spazio normale, F un chiuso di X. Esiste un'applicazione continua $f\colon X \to I$ tale che $F = f^{-1}(0)$ se, e soltanto se, esiste una successione di aperti $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ di X tali che $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n = F$.

2. *Il teorema del restringimento*

Sia X un insieme, $\mathfrak{U}$ un ricoprimento di X. Diremo che $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento *puntualmente finito* di X se, per ogni $x \in X$, è finito l'insieme degli indici $i \in I$ per i quali $x \in U_i$.

Sia X uno spazio topologico, ed $\mathfrak{U}$ un ricoprimento localmente finito di X. Allora $\mathfrak{U}$ è puntualmente finito.

Teorema 2.1. *Per uno spazio topologico X sono fatti equivalenti:*

1) *due chiusi qualunque non vuoti e disgiunti di X ammettono intorni disgiunti;*

2) *per ogni ricoprimento aperto e puntualmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X esiste un ricoprimento aperto $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ tale che*

(1) $$\bar{V}_i \subset U_i$$

per ogni $i \in I$.

Il ricoprimento $\mathfrak{V}$ si dice un *restringimento* di $\mathfrak{U}$.

Dimostrazione. Facciamo vedere che b) $\Rightarrow$ a). Siano F_1 e F_2 due chiusi non vuoti e disgiunti di X e sia $U_1 = \complement F_2$, $U_2 = \complement F_1$. Da $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ segue $U_1 \cup U_2 = X$. Siccome $\{U_1, U_2\}$ è un ricoprimento aperto di X, da b) segue che esistono due aperti V_1 e V_2 tali che $V_1 \cup V_2 = X$ e $\bar{V}_1 \subset U_1$, $\bar{V}_2 \subset U_2$. Pertanto

$$F_1 = \complement U_2 \subset \complement \bar{V}_2, \quad F_2 = \complement U_1 \subset \complement \bar{V}_1$$

dove $\complement \bar{V}_1$ e $\complement \bar{V}_1$ sono aperti disgiunti.

Facciamo vedere che a) $\Rightarrow$ b).

Consideriamo sull'insieme I degli indici un ordinamento totale, che notiamo $i < j$, avente la proprietà seguente: *ogni sottoinsieme non vuoto H di I possiede minimo elemento.* Ciò è sempre possibile. Un insieme con un ordinamento siffatto si dice *bene ordinato.*

Sia $(I, <)$ l'insieme bene ordinato così ottenuto. Poniamo

$$\Delta_h = \{i \in I \mid i < h\}.$$

Se h è il primo elemento di I (che indicheremo con i_0), allora $\Delta_h = \emptyset$.

In un insieme bene ordinato $(I, <)$ vale il seguente:

Principio di induzione (*transfinita*). *Sia H un sottoinsieme non vuoto di I con la seguente proprietà.*

(1) $$\Delta_h \subset H \Rightarrow h \in H.$$

Sotto tale ipotesi, $H = I$.[1]

Osserviamo che se $h = i_0$, allora $\Delta_h = \emptyset \subset H$ e quindi, in particolare, la (1) dice che $i_0 \in H$.

Fissiamo $h \in I$ e supponiamo di aver costruito per ogni $i < h$ (ossia per $i \in \Delta_h$) un aperto V_i tale che:

a) $\bar{V}_i \subset U_i$;
b) $[\bigcup_{i<h} V_i] \cup [\bigcup_{j \geq h} U_j]$ è un ricoprimento (aperto) di X.

Dimostriamo che possiamo costruire un aperto V_h tale che:

a)′ $\bar{V}_h \subset U_h$
b)′ $[\bigcup_{i \leq h} V_i] \cup [\bigcup_{j>h} U_j]$ è un ricoprimento (aperto) di X.

Poniamo $W_h = [\bigcup_{i<h} V_i] \cup [\bigcup_{j>h} U_j]$. Risulta $X = U_h \cup W_h$.

Ne segue che $\complement W_h$ è un chiuso di X contenuto nell'aperto U_h. Siccome vale la 1) del teorema 2.1, esiste un aperto V_h tale che

$$\complement W_h \subset V_h \subset \bar{V}_h \subset U_h.$$

Siccome $\complement W_h \cup W_h = X$, è anche $V_h \cup W_h = X$. L'aperto V_h soddisfa dunque alle a′) e b)′.

Per il principio di induzione, possiamo costruire, per ricorrenza su I, un aperto V_h per ogni $h \in I$, tale che valgano le a′) e b′).

Dal fatto che $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento puntualmente finito di X seguirà che $\{V_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di X.

Sia $x \in X$; si deve dimostrare che esiste $k \in I$ tale che $x \in V_k$. Siccome $\{U_i\}_{i \in I}$ è puntualmente finito, esiste $I' \subset I$, I' finito, tale che $x \notin U_i$ per $i \notin I'$. Sia $h = \max I'$. Ne segue che

$$x \notin \bigcup_{j>h} U_j.$$

Per b′), deve aversi $x \in \bigcup_{i \leq h} V_i$, e quindi esiste $k \leq h$ tale che $x \in V_k$. Q.E.D.

Corollario 2.2. *Sia X uno spazio normale. Ogni ricoprimento aperto e puntualmente finito di X possiede un restringimento.*

[1] Il lettore desideroso di approfondire le questioni connesse con il buon ordinamento ed il principio di induzione potrà consultare, ad esempio, P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966, di prossima pubblicazione per i tipi di Feltrinelli in questa stessa collana.

Sia dato un ricoprimento aperto puntualmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ dello spazio topologico X.

Definizione 2.3. Un sistema $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ di funzioni reali continue su X dicesi una *partizione dell'unità* associata a $\mathfrak{U}$ se

a) $\varphi_i(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$;
b) $\varphi_i(x) = 0$ al di fuori di un chiuso contenuto in U_i;
c) $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Osserviamo che la condizione c) ha senso in quanto $\mathfrak{U}$ è puntualmente finito.

Teorema 2.4. *Per ogni ricoprimento aperto localmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ di uno spazio normale X esiste una partizione dell'unità associata a $\mathfrak{U}$.*

Dimostrazione. In base al corollario 2.2 esistono un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ ed un ricoprimento aperto $\{W_i\}_{i \in I}$ di X tali che $\bar{W}_i \subset V_i$ e $\bar{V}_i \subset U_i$. Poiché $\{U_i\}$ è localmente finito, anche i ricoprimenti $\{V_i\}$ e $\{W_i\}$ sono localmente finiti. Fissato un qualsiasi indice $i \in I$, per il lemma di Urysohn esiste una funzione continua $\psi_i\colon X \to \mathbf{R}$, tale che

$$0 \leq \psi_i(x) \leq 1 \quad \text{per ogni } x \in X,$$
$$\psi_i(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in \bar{W}_i,$$
$$\psi_i(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \complement V_i.$$

Segue da quest'ultima condizione che la funzione $\psi_i(x)$ si annulla al di fuori del chiuso $\bar{V}_i$, contenuto in U_i. Sia x_0 un qualsiasi punto di X. Poiché il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ è localmente finito, esiste un intorno U di x_0, ed un sottoinsieme finito $\{i_1, \ldots, i_n\}$ di I tale che $U \cap U_i = \emptyset$ per $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$. Per ogni $x \in U$ risulta

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) = \psi_{i_1}(x) + \ldots + \psi_{i_n}(x).$$

Segue da quest'ultima formula che la somma $\sum_{i \in I} \psi_i(x)$ contiene solo un numero finito di addendi $\neq 0$ in ogni punto di X, sicché è definita la funzione $\psi\colon X \to \mathbf{R}$ espressa dalla

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x) \tag{2}$$

Dalla stessa formula (2) segue inoltre che ψ è continua in x, e ciò per ogni $x \in X$. Poiché $\{W_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di X, per ogni $x_0 \in X$ esiste una funzione ψ_i tale che $\psi_i(x_0) = 1$. Risulta pertanto $\psi(x_0) \geqslant 1$, sicché ψ non si annulla in nessun punto di X. Le funzioni $\varphi_i = \dfrac{\psi_i}{\psi}$ costituiscono una partizione dell'unità associata al ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$. Q.E.D.

Esempi

[2.1] Sia X uno spazio paracompatto. Per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ esiste un raffinamento $\{V_i\}_{i\in I}$, localmente finito, tale che: $V_i = \bar{V}_i$ ed $X = \bigcup_{i\in I} \mathring{V}_i$.

(Esiste infatti un raffinamento $\{W_i\}_{i\in I}$ aperto e localmente finito di $\{U_i\}$. Sia $\{V_i'\}$ un restringimento di $\{W_i\}$ e $V_i = \bar{V}_i'$.)

[2.2] Sia X uno spazio normale, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito e per ogni i sia $V_i \subset U_i$ un chiuso, tale che

$$V_i \cap V_j = \emptyset \text{ se } i \neq j.$$

Sia inoltre $\{f_i\colon U_i \to \mathbf{R}\}_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni continue. Esiste una funzione continua $f\colon X \to \mathbf{R}$ tale che $f_{|V_i} = f_{i|V_i}$.

(Si costruisca una partizione dell'unità $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$, tale che $\varphi_i(x) = 1$ per $x \in V_i$.)

[2.3] Sia D un convesso (v. esempio 3.1 del capitolo quarto) dell'$\mathbf{R}^n$ euclideo, X uno spazio normale, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto e localmente finito. Sia inoltre per ogni $i \in I$, $V_i \subset U_i$ un chiuso di X tale che $V_i \cap V_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

Se $\{f_i\colon U_i \to D\}_{i\in I}$ è una famiglia di applicazioni continue, esiste un'applicazione continua $f\colon X \to D$ tale che $f_{|V_i} = f_{i|V_i}$.

3. *Spazi completamente regolari*

Definizione 3.1. Uno spazio topologico X si dice *completamente regolare* o di Tychonoff se X è T_1 e se per ogni chiuso F di X ed ogni punto x di X, con $x \notin F$, esiste una funzione continua $f\colon X \to I$ ($I = [0, 1]$) tale che

$$f(x) = 0, \quad f(F) = 1. \tag{1}$$

Se X è completamente regolare, ogni spazio omeomorfo ad X è completamente regolare.

Uno spazio X completamente regolare è uno spazio regolare. Infatti se F è chiuso, $x \notin F$, e $f\colon X \to I$ è continua e tale che valgano le (1), gli aperti $f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ ed $f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ sono intorni disgiunti di x ed F rispettivamente.

Inoltre uno spazio normale è completamente regolare: basta tener conto del lemma di Urysohn, quando i chiusi disgiunti sono x ed F.

Esistono spazi regolari che non sono completamente regolari e spazi completamente regolari che non sono normali.

Esempio

[3.1] Lo spazio X dell'esempio 2.9 del capitolo sesto non è normale, ma — come ora mostreremo — è completamente regolare. La sua topologia è piú fine della topologia euclidea. Sia F un chiuso di X. Siccome il sottospazio $y > 0$ ha la topologia euclidea, $F \cap \{y>0\}$ è chiuso in $\{y>0\}$ rispetto alla topologia euclidea e quindi $F \cup \{y=0\}$ è chiuso in X rispetto alla topologia euclidea (oltre che chiuso rispetto alla topologia data).

L'insieme X con la topologia euclidea è uno spazio normale; se $(x, y) \in X - F$ e $y > 0$, allora $(x, y) \in X - (F \cup \{y=0\})$; per il lemma di Urysohn esiste una funzione $f\colon X \to I$ continua rispetto alla topologia euclidea di X (e quindi continua rispetto alla topologia dell'esempio 2.9) tale che

$$f(x, y) = 0, \ f(F \cup \{y=0\}) = 1.$$

Se $(x_0, 0) \in X - F$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\overline{S((x_0, \varepsilon), \varepsilon)} \cap F = \emptyset.$$

La funzione $f\colon X \to I$ cosí definita:

$f(x, y) = 1$ se $(x, y) \notin S((x_0, \varepsilon), \varepsilon) \cup \{(x_0, 0)\}$

$f(x, y)$ varia linearmente da 0 ad 1 su ogni corda del disco chiuso $\overline{S(x_0, \varepsilon), \varepsilon)}$ uscente da $(x_0, 0)$

è continua e tale che $f(x_0, 0) = 0$, $f(F) = 1$.

Lemma 3.2. *Ogni sottospazio di uno spazio normale è uno spazio completamente regolare.*

Dimostrazione. Siano: Y uno spazio normale, X un sottospazio di Y, x un punto di X ed F un chiuso di X tali che $x \notin F$. Esiste un chiuso G di Y tale che $F = G \cap X$. Pertanto x è un punto di Y che non appartiene a G. Per il lemma di Urysohn applicato ai chiusi disgiunti x e G, esiste una funzione continua h: $Y \to I$ tale che $h(x) = 0$, $h(G) = 1$. La restrizione $f = h_{|X}$: $X \to I$ di h ad X è un'applicazione continua tale che $f(x) = 0, f(F) = 1$. Q.E.D.

Esempio

[3.2] Ogni spazio localmente compatto e di Hausdorff è completamente regolare (è sottospazio di uno spazio normale, la sua compattificazione di Alexandroff).

In modo del tutto analogo al lemma 3.2 (riferendosi alla definizione 3.1 invece che al lemma di Urysohn), si dimostra la

Proposizione 3.3. *Ogni sottospazio di uno spazio completamente regolare è uno spazio completamente regolare.*

Definizione 3.4. Sia A un insieme qualunque. Diremo *cubo* (o cubo reale) di dimensione A, il prodotto topologico $I^A = \prod_{a \in A} I_a$ dove $I_a = I = [0, 1]$ per ogni $a \in A$.

I cubi reali sono spazi compatti e di Hausdorff, e quindi sono spazi normali. Una prima caratterizzazione degli spazi completamente regolari è espressa nel teorema seguente.

Teorema 3.5. *Uno spazio topologico X è completamente regolare se, e soltanto se, X è omeomorfo ad un sottospazio di un cubo reale.*

Dimostrazione. Se X è omeomorfo ad un sottospazio di un cubo reale, X è completamente regolare, per il lemma 3.2. Resta da dimostrare che, se X è completamente regolare, esiste un insieme A ed un'applicazione f: $X \to I^A$ tale che f sia un omeomorfismo di X col sottospazio $f(X)$ del cubo I^A.

Sia $A = C(X, I)$ l'insieme delle applicazioni continue di X in $I = [0, 1]$. Per maggiore chiarezza della dimostrazione, per ogni $a \in A$ indichiamo con f_a: $X \to I$ la funzione continua rappresentata da a.

Sia f: $X \to I^A$ l'applicazione definita da:

$$f(x) = \{f_a(x)\}_{a \in A} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Dalla proposizione 6.5 del capitolo secondo segue che f è continua. Siano x ed y due punti distinti di X. Siccome X è T_1, $\{x\}$ e $\{y\}$ sono due chiusi disgiunti. Poiché X è completamente regolare, esiste $a \in A$ tale che $f_a(x) = 0$, $f_a(y) = 1$; ne segue $f(x) \neq f(y)$, e quindi f è iniettiva.

Siccome f è continua e iniettiva, dimostreremo che f è un omeomorfismo di X con $f(X)$ se riusciremo a provare che, per ogni chiuso F di X, $f(F)$ è un chiuso di $f(X)$.

Sia $z \in f(X) - f(F)$ e sia $x \in X$ tale che $f(x) = z$.

Siccome F è chiuso e $x \notin F$, esiste $a \in A$ tale che $f_a(x) = 0$, $f_a(F) = 1$. Sia p_a: $I^A \to I_a = I$ la proiezione canonica del prodotto I^A sul fattore I_a; $U = p_a^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ è un intorno di $z = f(x)$ in I^A che non interseca $p_a^{-1}(f_a(F))$. Siccome $f_a = p_a \circ f$, risulta

$$p_a^{-1}(f_a(F)) \supset f(F)$$

e quindi $U \cap f(F) = \emptyset$. Ciò prova che $f(F)$ è chiuso in $f(X)$. Q.E.D.

Sia X uno spazio completamente regolare. La famiglia $C(X, I)$ delle funzioni continue su X a valori in $I = [0, 1]$ ha la proprietà seguente:

"per ogni chiuso F di X ed ogni $x \in X - F$ esiste $f \in C(X, I)$ tale che $f(x) \notin \overline{f(F)}$."

Basta considerare infatti una funzione continua f: $X \to I$ tale che $f(x) = 0$, $f(F) = 1$.

La proprietà suddetta caratterizza gli spazi completamente regolari, nel senso precisato dal seguente teorema.

Teorema 3.6. *Uno spazio topologico X è completamente regolare se, e soltanto se, esiste una famiglia $\mathfrak{F} = \{f_a: X \to \mathbf{R}\}_{a \in A}$ di funzioni continue su X a valori reali con la proprietà seguente: per ogni chiuso F di X ed ogni $x \in X - F$, esiste $a \in A$ tale che*

$$f_a(x) \notin \overline{f_a(F)}.$$

Dimostrazione. Se X è uno spazio completamente regolare, la famiglia $\mathfrak{F} = C(X, I)$ ha, come abbiamo già osservato, la proprietà richiesta dal teorema.

Inversamente, sia X uno spazio topologico e sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni continue su X, a valori reali, con la proprietà espressa nel teorema.

Sia h: $\mathbf{R} \to]0, 1[$ un omeomorfismo della retta reale con l'intervallo $]0, 1[$ (v. gli esempi 4.7 del capitolo primo e 2.2 del capitolo quarto).

Per ogni $a \in A$ il prodotto $g_a = h \circ f_a$ definisce un'applicazione continua g_a: $X \to I = [0, 1]$. La famiglia di funzioni continue $\mathfrak{G} = \{g_a: X \to I\}_{a \in A}$ ha ancora la proprietà espressa nel teorema. Definiamo un'applicazione g: $X \to I^A$ ponendo

$$g(x) = \{g_a(x)\}_{a \in A} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Con una dimostrazione analoga a quella del teorema 3.5, proveremo che g è un omeomorfismo di X col sottospazio $g(X)$ del cubo reale I^A. Dallo stesso teorema 3.5 segue che X è completamente regolare.

Siccome ogni funzione g_a è continua, anche g è un'applicazione continua. Siccome ogni punto di X è chiuso, se $x \neq y$, esiste $a \in A$ tale che $g_a(x) \notin g_a(\{y\})$, ossia tale che $g_a(x) \neq g_a(y)$.

Dunque g è continua e iniettiva; dimostriamo che se F è un chiuso di X, $g(F)$ è un chiuso di $g(X)$. Sia $x \in X - F$, e sia $a \in A$ tale che

$$g_a(x) \notin \overline{g_a(F)}.$$

Sia p_a la proiezione canonica di I^A su $I_a = I$. Esiste un intorno V di $g_a(x)$ in I_a tale che $V \cap g_a(F) = \emptyset$. Quindi $U = p_a^{-1}(V)$ è un intorno di $g(x)$ in I^A tale che $U \cap p_a^{-1}(g_a(F)) = \emptyset$. Siccome

$$g(F) \subset p_a^{-1}(g_a(F)),$$

U non interseca $g(F)$ e ciò prova l'asserto. Q.E.D.

Supponiamo che la famiglia $\mathfrak{F}$ di cui al teorema 3.7 sia numerabile. In tal caso X è omeomorfo a un sottospazio di $I^{\mathbf{N}}$. Siccome $I^{\mathbf{N}}$, come sappiamo (v. esempio 7.1 del capitolo secondo), è metrizzabile, anche X è metrizzabile.

Questa situazione si verifica in un caso particolarmente importante, quando X è uno spazio regolare, a base numerabile. Come sappiamo (v. teorema 6.9 del capitolo terzo), uno spazio siffatto è normale. Dimostriamo ora che X è metrizzabile, provando che:

Teorema 3.8 (di metrizzazione di Urysohn). *Se X è uno spazio regolare a base numerabile, esiste una famiglia numerabile*

$$\mathfrak{F} = \{f_n: X \to I\}_{n \in \mathbf{N}}$$

di funzioni continue con la proprietà seguente: per ogni chiuso F ed ogni punto $x \in X - F$, esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$f_n(x) \notin \overline{f_n(F)}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}$ una base numerabile di X. Consideriamo l'insieme $\mathfrak{H}$ delle coppie (U, V) di elementi di $\mathfrak{B}$ tali che $U \supset \bar{V}$. Siccome $\mathfrak{H}$ è numerabile, può scriversi

$$\mathfrak{H} = \{(U_n, V_n)\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Sia F un chiuso di X e sia $x \in X - F$. Esiste $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B$, $B \cap F = \emptyset$. Poiché X è regolare, esiste $B' \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B' \subset \bar{B}' \subset B$. Dunque (B, B') è un elemento di $\mathfrak{H}$, ossia esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$x \in V_n \subset \bar{V}_n \subset U_n, \quad U_n \cap F = \emptyset.$$

$\bar{V}_n$ e $\complement U_n$ sono chiusi disgiunti.

Essendo X normale (v. teorema 6.9 del capitolo terzo), esiste, per il lemma di Urysohn, una funzione

$$f_n: X \to I$$

continua e tale che

$$f_n(y) = 0 \text{ per } y \in \bar{V}_n;$$

$$f_n(y) = 1 \text{ per } y \notin U_n.$$

Ne segue

$$f_n(x) = 0 \notin \overline{f_n(F)} = 1.$$

Q.E.D.

Osservazione. Si può dimostrare il teorema 3.8 senza fare riferimento al fatto che X sia uno spazio normale, ma tenendo conto del corollario 1.5. La funzione f_n: $X \to I$, che esiste per il corollario suddetto, è tale che

$$f_n^{-1}(0) = \bar{V}_n, \quad f_n^{-1}(1) = \complement U_n.$$

Esempio

[3.3] Esistono spazi metrizzabili che non sono a base numerabile: tale è ad esempio l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali con la topologia discreta.

4. *Compattificazione di Stone-Čech*

Sia h: $X \to Y$ un'applicazione dello spazio topologico X in uno spazio Y compatto e di Hausdorff.

Definizione 4.1. Se h è un omeomorfismo di X con $h(X)$, e se $h(X)$ è denso in Y, diremo che (Y, h) è una *T_2-compattificazione* di X.

Esempi

[4.1] Se X è compatto e (Y, h) è una T_2-compattificazione di X, h è un omeomorfismo di X con Y.

[4.2] Sia X uno spazio topologico, $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ la compattificazione di X con l'aggiunta del punto all'infinito e sia i: $X \to \hat{X}$ l'applicazione identica. $(\hat{X}, i)$ è una T_2-compattificazione di X se, e soltanto se, X è localmente compatto e di Hausdorff, ma non è compatto.

La T_2-compattificazione dell'esempio 4.2 è stata discussa ampiamente nel paragrafo 5 del capitolo quinto e, come sappiamo, si applica soltanto agli spazi localmente compatti e di Hausdorff.

Un secondo metodo per ottenere una T_2-compattificazione di uno spazio topologico X è un'applicazione diretta del teorema 3.5, e riguarda gli spazi completamente regolari.

Come nella dimostrazione del teorema 3.5, sia X uno spazio completamente regolare, e sia $A = C(X, I)$ l'insieme delle applicazioni continue di X in $I = [0, 1]$. Per ogni $a \in A$, h_a: $X \to I$ è la funzione continua rappresentata da a.

L'applicazione h: $X \to I^A$, definita da $h(x) = \{h_a(x)\}_{a \in A}$ per ogni $x \in X$, è un omeomorfismo di X con $h(X)$. Poniamo $\check{X} = \overline{h(X)}$. Manifestamente $(\check{X}, h)$ è una T_2-compattificazione di X.

Definizione 4.2. Sia X uno spazio completamente regolare. La T_2-compattificazione $(\check{X}, h)$ di X si dice la *compattificazione di Stone-Čech* di X.

Siano X e X' due spazi completamente regolari, e sia

$$A = C(X,I), \qquad A' = C(X', I).$$

Siano infine h: $X \to I^A$, h': $X' \to I^{A'}$ le applicazioni definite sopra.

Lemma 4.3. *Se* g: $X \to X'$ *è un'applicazione continua, esiste un'applicazione continua* g^*: $I^A \to I^{A'}$ *tale che*

$$(1) \qquad g^* \circ h = h' \circ g.$$

Dimostrazione. Per ogni $a' \in A'$, ossia per ogni $h'_{a'}$: $X' \to I$ continua, l'applicazione $h'_{a'} \circ g$: $X \to I$ è continua e quindi è un elemento $\gamma(a')$ di A. Sia γ: $A' \to A$ l'applicazione cosí definita.

Sia $u = (u_a)_{a \in A} \in I^A$. Poniamo

$$g^*(u) = \{u_{\gamma(a')}\}_{a' \in A'} \in I^{A'}.$$

L'applicazione g^*: $I^A \to I^{A'}$ è continua, perché è ovviamente continua ogni sua componente $g^*_{a'}$ $(a' \in A')$.

Sia $p_{a'}$: $I^{A'} \to I$ la proiezione canonica. Si ha:

$$p_{a'}(g^* \circ h(x)) = g^*_{a'}(h(x)) = h_{\gamma(a')}(x) = h'_{a'} \circ g(x) = p_{a'}(h \circ g(x))$$

per ogni $x \in X$, e quindi vale la (1). Q.E.D.

Siano X, X' due spazi completamente regolari, e siano $(\check{X}, h)$, $(\check{X}', h')$ le rispettive compattificazioni di Stone-Čech.

Proposizione 4.4. *Se* g: $X \to X'$ *è un'applicazione continua, esiste una ed una sola applicazione continua* $\check{g}$: $\check{X} \to \check{X}'$ *tale che*

$$(2) \qquad \check{g} \circ h = h' \circ g.$$

Dimostrazione. Sia g^*: $I^A \to I^{A'}$ l'applicazione continua costruita col lemma 4.3. Siccome g^* è continua, dalla proposizione 6.8 del capitolo primo segue che

$$g^*(\overline{h(X)}) \subset \overline{g^*(h(X))}.$$

Per la (1), si ha

$$g^*(h(X)) = h'(g(X) \subset h'(X')$$

e quindi

$$g^*(\check{X}) = g^*(\overline{h(X)}) \subset \overline{h'(X')} = \check{X}'.$$

La restrizione di g^* a $\check{X}$ induce quindi un'applicazione continua

$$\check{g}\colon \check{X} \to \check{X}'$$

che, per la (1), ha la proprietà (2).

Per la (2), l'unicità di $\check{g}$ è conseguenza immediata del corollario 2.2 del capitolo terzo. Q.E.D.

Con le ipotesi della proposizione 4.4, supponiamo in piú che X' sia compatto. Si ha allora:

Corollario 4.5. *Se g: $X \to X'$ è continua e X' è compatto, esiste una ed una sola applicazione continua G: $\check{X} \to \check{X}'$ tale che*

$$G \circ h = g.$$

Dimostrazione. Siccome $\check{X}'$ è di Hausdorff e h': $X' \to \check{X}'$ è continua, dal teorema 2.3 del capitolo quinto segue che $h'(X')$ è compatto e quindi chiuso in $\check{X}'$. Siccome $h'(X')$ è denso in $\check{X}'$ ed h' è iniettiva, h': $X' \to \check{X}'$ è un omeomorfismo.

L'applicazione $G = h'^{-1} \circ \check{g}$ ha le proprietà richieste ed è unica per il corollario 2.2 del capitolo terzo. Q.E.D.

La compattificazione di Stone-Čech di uno spazio completamente regolare X è la piú " larga " possibile tra le T_2-compattificazione di X nel senso precisato dal teorema seguente.

Teorema 4.6. *Sia X uno spazio completamente regolare e sia (Y, k) una T_2-compattificazione di X. Y è omeomorfo ad uno spazio quoziente di $\check{X}$.*

Dimostrazione. Per il corollario 4.5 esiste una (ed una sola) applicazione continua G: $\check{X} \to Y$ tale che

$$G \circ h = k$$

dove h: $X \to \check{X}$ è l'immersione della compattificazione di Stone-Čech di X.

Siccome $G(\check{X}) = G(\overline{h(X)}) \supset k(X)$ che è denso in Y, e $G(\check{X})$ è compatto e quindi chiuso in Y, G risulta surgettiva.

Siccome $\check{X}$ è compatto e di Hausdorff, G è chiusa (cioè trasforma chiusi in chiusi).

Per il teorema 8.5 del capitolo secondo lo spazio quoziente $\check{X}/\Re_G$ di $\check{X}$ modulo la relazione di equivalenza indotta da G in $\check{X}$ è omeomorfo ad Y. Q.E.D.

Esempi

[4.3] Siano X e X' due spazi completamente regolari e omeomorfi e sia f: $X \to X'$ un omeomorfismo di X con X'. Se $(\check{X}, h)$, $(\check{X}', h')$

sono le compattificazioni di Stone-Čech di X e X' rispettivamente, esiste uno (ed un solo) omeomorfismo $\check{f}$: $\check{X} \to \check{X}'$ tale che

$$\check{f} \circ h = h' \circ f.$$

[4.4] La compattificazione di Stone-Čech di uno spazio completamente regolare X è connessa se, e soltanto se, X è connesso.

[4.5] Sia X uno spazio normale, e sia $(\check{X}, h)$ la compattificazione di Stone-Čech di X. Ogni $y \in \check{X} - h(X)$ non è limite di una successione $\{y_n\}$ di $h(X)$. Sia, per assurdo, $\{y_n\}$ una successione di $h(X)$ convergente ad $y \in \check{X} - h(X)$. Siccome $\check{X}$ è di Hausdorff, il sottoinsieme $T = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{y_n\}$ di $h(X)$ non ha punti di accumulazione in $h(X)$. Sia $x_n \in X$ tale che $h(x_n) = y_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}^*$.

$S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{x_n\}$ è un sottoinsieme di X privo di punti di accumulazione, e quindi

$$S_p = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{x_{2n}\}, \quad S_d = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{x_{2n-1}\}$$

sono due chiusi disgiunti dello spazio normale X. Sia f: $X \to I$ (lemma di Urysohn) una funzione continua tale che $f(S_p) = 0$, $f(S_d) = 1$, e sia F: $\check{X} \to I$ (v. corollario 4.5) la funzione continua tale che $F \circ h = f$. Deve essere $F(y_n) = F \circ h(x_n) = f(x_n) \to F(x)$, e ciò è assurdo.

[4.6] Sia $(\check{\mathbf{R}}, h)$ la compattificazione di Stone-Čech della retta reale $\mathbf{R}$. $\check{\mathbf{R}}$ è uno spazio compatto e di Hausdorff che non è compatto per successioni. (Segue dall'esempio 4.5 che la successione $\{h(n)\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ di $\mathbf{R}$ non possiede sottosuccessioni convergenti.)

Esercizi

1. Sia X uno spazio normale, $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ una successione di X convergente a x, i cui elementi siano tutti distinti. Esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ di funzioni continue f_n: $X \to I$, tale che

$$f_n(x_n) = 1; \quad f_n(x_m) = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n.$$

(Si tenga conto del lemma di Urysohn.)

Indice

Stampato dalla
Tipolito Milano-Roma
Via Pomezia 12 - Milano

Questo volume offre un'introduzione elementare a quei capitoli della topologia generale che trovano più frequente applicazione in molti rami della matematica moderna. Esso raccoglie le lezioni impartite nei corsi di geometria per studenti di matematica dell'Università di Pisa. Non è quindi un "trattato," ma — nato da un'esperienza didattica pluriennale — è accessibile a chiunque abbia conoscenze matematiche relativamente modeste: ad esempio, quelle dei corsi istituzionali per fisici, per ingegneri, chimici, biologi o per economisti.

Gli autori:

Vittorio Checcucci è professore aggregato di geometria nell'Università di Pisa.
Alberto Tognoli è professore straordinario di matematiche complementari nella stessa Università.
Edoardo Vesentini è professore ordinario di geometria nella Scuola Normale Superiore di Pisa.

Nella stessa collana:

- E. Artin, Algebra geometrica
- C. Chevalley, Concetti fondamentali di algebra. Costruzione e studio di alcune importanti algebre
- P. R. Halmos, Teoria elementare degli insiemi
- L. Lombardo-Radice, Istituzioni di algebra astratta
- M. Zamansky, Introduzione all'algebra e all'analisi moderna
- G. Zappa e R. Permutti, Gruppi corpi equazioni

L. 6.000
(5.658)

V. Checcucci A. Tognoli E. Vesentini

Lezioni di topologia generale

Feltrinelli