21. Nell'$\mathbf{R}^3$ euclideo delle terne (x, y, z) di numeri reali, sia $\mathbf{R}^2$ il piano $z = 0$, $P = (0, 0, 1)$, $I = [0, 1]$, A un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Sia ora:

a) CA il cono di base A e vertice P, ossia il sottospazio di $\mathbf{R}^3$

$$x = x_0(1 - t), \quad y = y_0(1 - t), \quad z = t; \quad (x_0, y_0) \in A, \quad t \in I;$$

b) KA il cilindro di base A e altezza 1, ossia il sottospazio di $\mathbf{R}^3$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = t; \quad (x_0, y_0) \in A, \quad t \in I;$$

c) $\tilde{C}A$ lo spazio quoziente di KA ottenuto da KA identificando ad un punto la base superiore A_1: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$; $(x_0, y_0) \in A$.
Dimostrare che:

1) il cilindro KA è omeomorfo al prodotto topologico $A \times I$;
2) in modo " naturale " è definita un'applicazione del cilindro KA sul cono CA, che, per passaggio al quoziente, induce un'applicazione g di $\tilde{C}A$ su CA bigettiva e continua;
3) se A è l'insieme dei punti $P_n = (n, 0)$ di $\mathbf{R}^2$, dove $n \in \mathbf{N}$, allora g non è un omeomorfismo.

22. Sia α il piano euclideo, 0 un punto di α. Si considerino in $\alpha - 0$ le due relazioni di equivalenza

$P\,\mathfrak{R}_1 Q$ significa $Q \in$ retta OP
$P\,\mathfrak{R}_2 Q$ significa $Q \in$ semiretta OP

e sia $\mathfrak{S}$ la restrizione di $\mathfrak{R}_1$ ad un cerchio del piano di centro 0.
Dimostrare che gli spazi quozienti

$$(\alpha - 0)/\mathfrak{R}_1, \quad (\alpha - 0)/\mathfrak{R}_2, \quad C/\mathfrak{S}$$

sono tutti omeomorfi a C.

Capitolo terzo

Spazi di Hausdorff e assiomi di separazione

1. *Spazi di Hausdorff*

Definizione 1.1. Dicesi *spazio di Hausdorff* (o spazio separato) uno spazio topologico nel quale per ogni coppia di punti distinti x, y esistono un intorno U di x ed uno V di y tra loro disgiunti. La topologia di uno spazio siffatto verrà anche detta di Hausdorff (o separata).

Se la topologia di X è separata, ogni topologia piú fine di quella di X è separata. Si ha inoltre che se X è di Hausdorff, ogni spazio ad esso omeomorfo è di Hausdorff.

Gli spazi topologici con la topologia discreta sono spazi di Hausdorff. Un'ampia classe di spazi siffatti è messa in luce dalla seguente:

Proposizione 1.2. *Ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico con distanza d. Siano x e y due punti distinti di X e sia ε un qualsiasi numero positivo tale che

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\, d(x, y). \tag{1}$$

Proviamo che i dischi $S(x, \varepsilon)$ e $S(y, \varepsilon)$ di raggio ε e centro x e y sono disgiunti. Infatti, se

$$S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

preso un punto $z \in S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon)$ si avrebbe

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < 2\,\varepsilon,$$

in contraddizione con la (1). Q.E.D.

Esempi

[1.1] L'$\mathbf{R}^n$ euclideo è uno spazio di Hausdorff.

[1.2] Un insieme totalmente ordinato senza massimo e minimo $(X, \leqslant)$ con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli (aperti) $]a, b[$ è uno spazio di Hausdorff.

[1.3] Un insieme infinito X con la topologia che ha per chiusi (oltre X) i sottoinsiemi finiti di X non è uno spazio di Hausdorff.

Proposizione 1.3. *Ogni sottospazio di uno spazio di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia X di Hausdorff, Y un sottospazio di X, e siano x e y due punti distinti di Y. Poiché X è di Hausdorff, esistono un intorno U di x ed uno V di y, in X, tali che

$$U \cap V = \emptyset\,.$$

Ne segue che anche gli intorni $U \cap Y$ e $V \cap Y$ di x e y in Y sono disgiunti. Q.E.D.

Proposizione 1.4. *Lo spazio prodotto X di una qualsiasi famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di spazi di Hausdorff è di Hausdorff. Inversamente, se X è di Hausdorff e non vuoto, tutti gli X_i sono di Hausdorff.*

Dimostrazione. Se $x = \{x_i\}_{i\in I}$ e $y = \{y_i\}_{i\in I}$ sono due punti distinti di X, esiste almeno un indice $j \in I$ tale che $x_j \neq y_j$.

Poiché X_j è uno spazio di Hausdorff, esistono due aperti, U_j e V_j di X_j, tali che $x_j \in U_j$ e $y_j \in V_j$, e che

$$U_j \cap V_j = \emptyset. \tag{2}$$

Per la proposizione 6.3, del capitolo secondo, gli insiemi

$$U = \prod_{i\in I} U_i \qquad \text{e} \qquad V = \prod_{i\in I} V_i$$

con $U_i = V_i = X_i$ per $i \neq j$, sono aperti in X.

Risulta $x \in U$ e $y \in V$. Inoltre, per la (2),

$$U \cap V = \prod_{i\in I} U_i \cap V_i = \emptyset.$$

Dunque X è uno spazio di Hausdorff.

Inversamente, sia X di Hausdorff. Per ogni $j \in I$, lo spazio X_j è omeomorfo al sottospazio di X

$$\prod_{i\in I} A_i$$

ove $A_j = X_j$ e per $i \neq j$, A_i è un punto arbitrariamente fissato in X_i.

Per la proposizione 1.3, X_j è uno spazio di Hausdorff. Q.E.D.

Teorema 1.5. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se, e soltanto se, per ogni punto $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x è l'insieme costituito dal punto x.*

Dimostrazione. Sia X di Hausdorff. Per ogni punto $y \neq x$ esiste un intorno aperto U_x di x ed un intorno aperto U_y di y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$. Posto $M_y = \complement U_y$, M_y è chiuso, e risulta $U_x \subset M_y$, sicché M_y è un *intorno chiuso* di x.

Poiché, d'altra parte, $y \notin M_y$, l'intersezione degli intorni chiusi M_y di x, al variare di y in X non contiene nessun punto $y \in X$ diverso da x. A fortiori l'intersezione di *tutti* gli intorni chiusi di x si riduce al punto x.

Supponiamo inversamente che, per ogni $x \in X$, l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x sia il punto x.

Siano x e y due punti distinti di X. Per ipotesi esiste un intorno chiuso N_x di x che non contiene y. L'aperto $\complement N_x$ contiene y, e quindi è un intorno di y. Poiché

$$N_x \cap \complement N_x = \emptyset\,,$$

x e y hanno due intorni disgiunti. Siccome ciò accade per ogni scelta di x e y in X, con $x \neq y$, X è di Hausdorff. Q.E.D.

Il teorema 1.5 permette di invertire un caso particolare della proposizione 1.3 provando la:

Proposizione 1.6. *Se ogni punto di uno spazio topologico X ha un intorno chiuso, il quale, rispetto alla topologia indotta, sia di Hausdorff, anche X è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia x un punto di X e sia V un intorno chiuso di x il quale sia di Hausdorff. Per il teorema 1.5 l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x in V è il punto x. Poiché V è un intorno di x, come sappiamo dal paragrafo 2 del capitolo secondo, ciascuno di tali intorni è anche intorno di x in X; poiché V è chiuso, tali intorni, chiusi in V, sono chiusi in X. Pertanto l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x in X è il punto x. Segue dalla proposizione 1.5 che X è di Hausdorff. Q.E.D.

Teorema 1.7. *Lo spazio topologico X è uno spazio di Hausdorff se, e soltanto se, la diagonale Δ è un sottoinsieme chiuso di $X \times X$.*

Dimostrazione. Cominciamo ad osservare che, essendo U e V due sottoinsiemi qualsiansi di X, U è disgiunto da V se, e soltanto se, $U \times V$ è disgiunto dalla diagonale Δ di $X \times X$.

Sia X di Hausdorff, e sia (x, y) un qualsiasi punto di $X \times X$ il quale non appartenga a Δ. Risulta $x \neq y$ e, per conseguenza, esistono un intorno U di x ed un intorno V di y, tali che

$$U \cap V = \emptyset,$$

ossia tali che

$$(U \times V) \cap \Delta = \emptyset.$$

Poiché $U \times V$ è un intorno di (x, y), $\complement\Delta$ è aperto, ossia Δ è chiuso in $X \times X$.

Inversamente, se Δ è chiuso, cioè se $\complement\Delta$ è aperto in $X \times X$, ogni punto $(x, y) \notin \Delta$ ha un intorno disgiunto da Δ. Per il corollario 3.5 del capitolo secondo non è restrittivo supporre che tale intorno sia del tipo $U \times V$ con U intorno di x e V intorno di y. Poiché

$$(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$$

risulta

$$U \cap V = \emptyset,$$

onde segue che X è di Hausdorff. Q.E.D.

Esempio

[1.4] Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali con la topologia avente per base la famiglia degli intervalli aperti $]-\infty, a[$.

I chiusi di tale topologia sono $(\mathbf{R}, \emptyset)$ e gli intervalli $[a, +\infty[$. È ovvio che questa topologia non è di Hausdorff; ciò segue anche dal fatto che ogni intorno chiuso coincide con $\mathbf{R}$.

2. *Spazi di Hausdorff ed applicazioni continue*

Proposizione 2.1. *Siano f e g due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff X'. L'insieme Z dei punti $x \in X$, tali che $f(x) = g(x)$, è chiuso in X.*

Dimostrazione. Sia $y \in \complement Z$, ossia tale che $f(y) \neq g(y)$. Poiché X' è di Hausdorff, esiste un intorno U' di $f(y)$ ed un intorno V' di $g(y)$ i quali sono disgiunti. Siccome f e g sono continue, esiste un intorno U di y tale che $f(U) \subset U'$, $g(U) \subset V'$. Pertanto

$$f(U) \cap g(U) = \emptyset,$$

onde segue che $U \subset \complement Z$. Dunque $\complement Z$ è aperto, ossia Z è chiuso. Q.E.D.

Corollario 2.2. *Siano f e g due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff X'. Se $f(x) = g(x)$ in tutti i punti di un insieme D ovunque denso in X, f e g coincidono su tutto X.*

Infatti f e g coincidono su un chiuso contenente D e quindi su $\bar{D} = X$.

Esempio

[2.1] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale ed $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un'applicazione continua di $\mathbf{R}$ in sé, tale che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Allora f è la funzione lineare definita da $f(x) = kx$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, dove $k = f(1)$. (Si dimostra, per induzione, che $f(q) = kq$ per ogni $q \in \mathbf{Q}$ e si osserva che $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$ e che la funzione $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $g(x) = kx$ per ogni $x \in X$ ha le proprietà richieste per f.)

Proposizione 2.3. *Sia f un'applicazione continua di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff X'. Il grafico Γ_f di f è chiuso in $X \times X'$.*

Dimostrazione. L'applicazione $f\colon X \to X'$ definisce l'applicazione continua $g\colon X \times X' \to X'$ per la quale $g(x, x') = f(x)$.

Sia $q\colon X \times X' \to X'$ la proiezione di $X \times X'$ su X'. Il grafico Γ_f di f, ossia l'insieme

$$\Gamma_f = \{(x, x') \in X \times X' \mid x' = f(x)\}$$

può anche caratterizzarsi come l'insieme

$$\Gamma_f = \{z \in X \times X' \mid g(z) = q(z)\}.$$

Segue dalla proposizione 2.1 che Γ_f è chiuso in $X \times X'$. Q.E.D.

Proposizione 2.4. *Se per ogni coppia di punti distinti, x e y, di uno spazio topologico X esiste un'applicazione continua f di X in uno spazio di Hausdorff X' tale che $f(x) \neq f(y)$, X è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano x e y due punti distinti di X e sia f un'applicazione continua $f\colon X \to X'$ di X in uno spazio di Hausdorff X' tale che $f(x) \neq f(y)$. Siano U' e V' due intorni disgiunti di $f(x)$ e di $f(y)$ e siano U e V due intorni di x e di y tali che

$$f(U) \subset U', \qquad f(V) \subset V'.$$

Ne segue che $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V) \subset U' \cap V'$; poiché $U' \cap V' = \emptyset$, risulta $U \cap V = \emptyset$. Ne consegue che X è di Hausdorff. Q.E.D.

Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione continua di uno spazio topologico X in uno spazio topologico X' e sia $\mathfrak{R}_f$ la relazione di equivalenza indotta su X da f. Dal corollario 8.4 del capitolo secondo e sue conseguenze discende la

Proposizione 2.5. *Se X' è di Hausdorff, lo spazio quoziente $X/\mathfrak{R}_f$ è anch'esso di Hausdorff.*

Esempi

[2.2] Uno spazio quoziente di uno spazio di Hausdorff può non essere di Hausdorff. Ciò accade ad esempio per il quoziente della retta reale $\mathbf{R}$ modulo la relazione di equivalenza $x - y \in \mathbf{Q}$ (v. esercizio 16 del capitolo secondo).

[2.3] Sia X uno spazio topologico ed $\mathfrak{R}$ una relazione di equivalenza in X tale che:

a) $\pi\colon X \to X/\mathfrak{R}$ è aperta (trasforma aperti in aperti);
b) $R \subset X \times X$ definito dalla relazione $\mathfrak{R}$ è chiuso in $X \times X$.

In tali ipotesi $X/\mathfrak{R}$ è uno spazio di Hausdorff.

Siano infatti $u = \pi(x) \neq v = \pi(y)$; siccome $(x, y) \notin R$, esiste un intorno U di x ed uno V di y tali che $U \times V \subset \complement R$. Ne segue che $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni disgiunti di u, v rispettivamente.

[2.4] La condizione b) dell'esempio 2.3 è necessaria perché $X/\mathfrak{R}$ sia uno spazio di Hausdorff.

Sia infatti $X/\mathfrak{R}$ di Hausdorff, $(x, y) \notin R$, e quindi $\pi(x) \neq \pi(y)$. Se U è un intorno di $\pi(x)$ e V è un intorno di $\pi(y)$ in $X/\mathfrak{R}$, ed U, V sono disgiunti, i sottoinsiemi di X $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono intorni di x e y tali che $(x', y') \notin R$ per ogni $(x', y') \in \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$, e ciò prova che R è chiuso.

[2.5] La condizione a) dell'esempio 2.3 invece non è necessaria e nemmeno sufficiente perché $X/\mathfrak{R}$ sia di Hausdorff, come provano gli esempi seguenti:

1) Sia X l'unione del quadrato di $\mathbf{R}^2$: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ col segmento: $\{x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$, e sia $f\colon X \to \mathbf{R}$ la restrizione ad X della proiezione canonica $(x, y) \to x$. Il quoziente $X/\mathfrak{R}_f$ è di Hausdorff (proposizione 2.5), ma la proiezione naturale $\pi\colon X \to X/\mathfrak{R}_f$ non è aperta.

2) Sia $X = [-1, 1]$ con la topologia indotta dalla retta reale, ed $\mathfrak{R}$ la relazione di equivalenza cosí definita:

$$|y| = |x| \quad \text{se} \quad |x| < 1; \quad y = x \quad \text{se} \quad |x| = 1.$$

La proiezione naturale $\pi\colon X \to X/\mathfrak{R}$ è aperta ed $X/\mathfrak{R}$ non è uno spazio di Hausdorff.

Sia infatti $Y = \{-1\} \cup [0, 1]$; la restrizione g di π ad Y è un'applicazione bigettiva $g\colon Y \to X/\mathfrak{R}$ (mediante la quale possiamo identificare Y con $X/\mathfrak{R}$).

Una base della topologia quoziente di $X/\mathfrak{R}$ è rappresentata su Y dalla famiglia di aperti di X:

$$\begin{array}{ll}
[0, b[& \text{con } 0 < b \leqslant 1 \\
]a, 1] & \text{con } 0 \leqslant a < 1 \\
]a, b[& \text{con } 0 \leqslant a < b \leqslant 1 \\
\{-1\} \cup]a, 1[& \text{con } 0 \leqslant a < 1 \\
\{-1\} \cup [0, 1[&
\end{array}$$

Ciò prova che π è aperta e che i punti $\pi(1)$ e $\pi(-1)$ di $X/\mathfrak{R}$ non posseggono intorni disgiunti.

3. *Limiti e semicontinuità*

Siano X e X' due spazi topologici. Sia $A \subset X$, e sia data un'applicazione $f\colon A \to X'$. Sia infine a un punto di X aderente ad A.

Definizione 3.1. Si dice che un punto a' di X' è un *limite* di $f(x)$ *per* $x \in A$ *che tende ad* a (o per x che tende ad a in A) se l'applicazione

$$(1)\quad g\colon A \cup \{a\} \to X' \text{ definita da } \begin{cases} g(x) = f(x) & \text{per } x \in A - \{a\} \\ g(a) = a' \end{cases}$$

è continua nel punto a per la topologia indotta da X in $Y = A \cup \{a\}$.

Scriveremo in tal caso

$$a' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Proposizione 3.2. *Risulta*

$$a' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

se, e soltanto se, per ogni intorno U' *di* a' *in* X' *esiste un intorno* U *di* a *in* X *tale che:*

$$f(U \cap A) \subset U'.$$

Dimostrazione. Sia $Y = A \cup \{a\}$. Se

$$a' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x),$$

cioè se $g\colon Y \to X'$ è continua in a, per ogni intorno U' di a' in X' esiste un intorno U di a in X, tale che

$$g(U \cap Y) \subset U';$$

ne segue

$$f(U \cap A) \subset g(U \cap Y) \subset U'.$$

Supponiamo inversamente che per ogni intorno U' di a' in X' esista un intorno U di a in X tale che

$$f(U \cap A) \subset U',$$

e consideriamo l'applicazione $g\colon Y \to X'$ definita in (1).

$U \cap Y$ è un intorno di a nel sottospazio Y di X. Inoltre

$$g(U \cap Y) = \{a'\} \cup f(U \cap A) \subset U',$$

onde, per l'arbitrarietà di U', g è continua in a. Q.E.D.

Sia X' uno spazio di Hausdorff e siano a', b' due punti di X', entrambi limiti di $f(x)$ per $x \in A$ che tende ad a.

Se fosse $a' \neq b'$, esisterebbero due intorni disgiunti U' e V' di a' e, rispettivamente, b' in X'. D'altra parte, per la proposizione precedente, esisterebbe un intorno U di a in X tale che simultaneamente

$$f(U \cap A) \subset U', \qquad f(U \cap A) \subset V';$$

ne segue $f(U \cap A) = \emptyset$, e ciò è assurdo perché a è aderente ad A e quindi $U \cap A \neq \emptyset$. Si conclude pertanto con la:

Proposizione 3.3. *Se* X' *è uno spazio di Hausdorff, è unico il limite di* $f(x)$ *per* $x \in A$ *che tende ad* a.

Esempi

[3.1] Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff X', e sia $a \in X$. L'applicazione f è continua in a se, e soltanto se,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

(Qui è $A = X$ e la notazione $x \in X$ sotto il segno di limite è pleonastica.)

[3.2] La proposizione 3.3 non è piú vera se X' è uno spazio topologico qualunque, come prova l'esempio seguente: sia X' l'insieme **R** dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]-\infty, a[$. Come sappiamo (v. esempio 1.4) con questa topologia **R** non è uno spazio di Hausdorff. Sia f una funzione a valori reali definita su un sottoinsieme A di uno spazio topologico X, a un punto di X aderente ad A ed a' un numero reale tale che

$$a' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

È subito visto che per ogni numero reale $a'' \geqslant a'$ risulta

$$a'' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Infatti per ogni intervallo $]-\infty, b'[$ con $b' > a'$, esiste un intorno U di a in X tale che

$$(2)\qquad f(U \cap A) \subset]-\infty, b'[.$$

D'altra parte se $a'' \geqslant a'$, ogni intorno di a'' in $\mathbf{R}$ è intorno di a'; ciò prova, per la proposizione 3.2, che a'' è limite di $f(x)$ per $x \in A$ che tende ad a.

Possiamo dunque concludere che: l'insieme H dei numeri reali a' che sono limite di $f(x)$ per $x \in A$ che tende ad a, qualora non sia vuoto, coincide con $\mathbf{R}$, oppure è un intervallo del tipo $[c', +\infty[$, oppure è un intervallo del tipo $]c', +\infty[$.

È altrettanto immediato provare che se $c' = \text{Inf. } H$, allora $c' \in H$, ossia $H = [c', +\infty[$. Infatti ogni intorno aperto di c' è un intervallo del tipo $]-\infty, b'[$ con $c' < b'$; d'altra parte esiste $a' \in H$ tale che $c' < a' < b'$ e quindi $]-\infty, b'[$ è un intorno di a'. Ne segue che esiste un intorno U di a in X tale che valga la (2), e ciò prova l'asserto.

Il numero c' si dice *il minimo limite* della funzione f nel punto a e si indica con una delle notazioni seguenti

$$c' = \min \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x), \qquad c' = \varliminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Se l'insieme H dei limiti di $f(x)$ per $x \in A$ che tende ad a coincide con $\mathbf{R}$, si dice che il minimo limite di f nel punto a è $-\infty$.

Se $a \in A$ e se

$$f(a) = \min \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

la funzione f si dice *semicontinua superiormente* nel punto a.

Sia ora $A = X$ e sia $f\colon X \to \mathbf{R}$ una funzione a valori reali su X semicontinua superiormente in ogni punto x di X. Tenendo presente l'esempio 5.5 del capitolo primo, è immediato constatare che: *f è semicontinua superiormente su X* (ossia per ogni $c \in \mathbf{R}$ l'insieme $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ è aperto in X) *se, e soltanto se, f è semicontinua superiormente in ogni punto di X.*

[3.3] Sia ancora f una funzione a valori reali sul sottoinsieme A dello spazio topologico X e sia $a \in \bar{A}$. Il numero reale c'' si dice il *massimo limite* di f in a e si scrive

$$c'' = \max \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x), \qquad \text{oppure} \qquad c'' = \varlimsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

se

$$c'' = \min \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (-f(x)).$$

Se $a \in A$ e se

$$f(a) = \max \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

la funzione f si dice *semicontinua inferiormente* nel punto a.

Le definizioni di massimo limite e di semicontinuità inferiore si possono esprimere, sulla traccia dell'esempio 3.2, a partire da $\mathbf{R}$ con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]a, +\infty[$. Il lettore potrà enunciare tali definizioni per esercizio, e, tenendo presente l'esempio 5.6 del capitolo primo, stabilire l'analoga della proposizione posta alla fine dell'esempio precedente.

4. *Altri assiomi di separazione*

La condizione che uno spazio topologico X sia uno spazio di Hausdorff può enunciarsi dicendo che ad uno spazio di Hausdorff si richiede che due qualsiansi punti distinti siano separati da due intorni disgiunti. In tal senso la condizione che X sia di Hausdorff è un " assioma di separazione ". Altri assiomi di separazione sono enunciati nelle definizioni seguenti.

Definizione 4.1. Uno spazio topologico X è uno *spazio* T_0 se per ogni coppia di punti distinti di X esiste un intorno di uno di essi che non contiene l'altro punto.

Definizione 4.2. Uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se per ogni coppia di punti distinti x, y di X — comunque se ne scelga uno, x, dei due — esiste un intorno di x che non contiene y.

Con questa terminologia uno spazio di Hausdorff dicesi uno spazio T_2.

Ogni spazio T_1 è T_0; ogni spazio T_2 è T_1. D'altra parte, ciascuno di questi assiomi è piú forte di quello che lo precede, come risulta dai seguenti esempi.

Esempi

[4.1] Sia X l'insieme costituito da due punti distinti, a e b. Consideriamo su X le topologie definite dalle seguenti famiglie di aperti:

$$\tau = \{X, \emptyset\}$$
$$\tau_0 = \{X, \{a\}, \emptyset\}.$$

La famiglia τ definisce su X la topologia indiscreta, che *non* è T_0; τ_0 è T_0, ma non T_1.

[4.2] Sia X un insieme infinito con la topologia τ che ha per chiusi (oltre X e $\emptyset$) i sottoinsiemi finiti. La topologia τ è T_1 ma non T_2, come si è visto nell'esempio 1.3.

[4.3] Sia τ una topologia T_0 (oppure T_1) dell'insieme X; ogni topologia piú fine di τ è ancora T_0 (oppure T_1).

[4.4] Ogni sottospazio di uno spazio T_0 (oppure T_1) è uno spazio T_0 (oppure T_1).

La proposizione seguente fornisce alcune caratterizzazioni degli spazi T_1.

Proposizione 4.3. *Uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se, e soltanto se, vale una delle due condizioni seguenti:*

a) *ogni punto x di X è chiuso;*
b) *per ogni $x \in X$ l'intersezione degli intorni di x è $\{x\}$.*

Dimostrazione. Sia $x = \overline{x}$ per ogni $x \in X$; se x, y sono due punti distinti di X, il sottoinsieme $\complement\{y\}$ è un aperto contenente x e non y; da a) segue dunque che X è uno spazio T_1.

Supponiamo inversamente che X sia uno spazio T_1 e dimostriamo che $\complement\{x\}$ è aperto (e quindi x è chiuso) per ogni $x \in X$. Sia $y \in \complement\{x\}$, ossia sia $y \neq x$; esiste un intorno U di y che non contiene x; ciò significa che $U \subset \complement\{x\}$. Siccome questo è vero per ogni $y \in \complement\{x\}$, ne segue che $\complement\{x\}$ è aperto.

È altresí immediato che $\{x\}$ è l'intersezione degli intorni di x, se, e soltanto se, per ogni $y \notin \{x\}$, ossia per ogni $y \neq x$, esiste un intorno di x che non contiene y. Q.E.D.

Esempi

[4.5] Se X è uno spazio T_1 e finito, la topologia di X è la topologia discreta.

[4.6] L'insieme **R** dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]-\infty, a[$ non solo non è T_2 (v. esempio 1.4), ma non è nemmeno uno spazio T_1; però è uno spazio T_0.

Sia X uno spazio topologico, $\mathfrak{R}$ una relazione di equivalenza in X, $X/\mathfrak{R}$ lo spazio quoziente, $\pi\colon X \to X/\mathfrak{R}$ la proiezione naturale.

Proposizione 4.4. *Lo spazio $X/\mathfrak{R}$ è uno spazio T_1 se, e soltanto se, le classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza in X sono sottoinsiemi chiusi di X.*

Dimostrazione. Una classe di $\mathfrak{R}$-equivalenza $Y \subset X$ è chiusa se, e soltanto se, il punto $\pi(Y) \in X/\mathfrak{R}$ è chiuso in $X/\mathfrak{R}$. Pertanto le classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza sono sottoinsiemi chiusi di X, se e soltanto se, i punti di $X/\mathfrak{R}$ sono chiusi, cioè se, e soltanto se, $X/\mathfrak{R}$ è T_1. Q.E.D.

Esempio

[4.7] Lo spazio quoziente 2) dell'esempio 2.5, che non è uno spazio T_2, è però uno spazio T_1. Infatti ogni classe di $\mathfrak{R}$-equivalenza è costituita da uno, oppure due punti di $[-1, 1]$, che è di Hausdorff, e quindi è chiusa.

Proposizione 4.5. *Sia X uno spazio T_1, S un sottoinsieme di X, x un punto di accumulazione di S. Per ogni intorno U di x, l'insieme $U \cap S$ è infinito.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un intorno U di x tale che $U \cap S$ sia finito; siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i punti di $U \cap S$ diversi da x. Esistono degli intorni $U_1, U_2, \ldots, U_n$ di x tali che $x_1 \notin U_1, \ldots, x_n \notin U_n$. L'intorno di x

$$U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$$

ha in comune con S al piú il punto x, e quindi x non può essere di accumulazione per S. Q.E.D.

Dalla proposizione 4.5 segue il

Corollario 4.6. *Sia X uno spazio T_1. Se A è sottoinsieme di X, il derivato $D(A)$ è chiuso.*

Sia infatti $x \in \overline{D(A)}$ e sia U un intorno aperto di x. In U cade almeno un punto di accumulazione di A, e quindi cadono infiniti punti di A; ne segue che $x \in D(A)$.

Gli assiomi di separazione che abbiamo dato nelle definizioni 4.1 e 4.2 sono piú deboli che l'assioma di separazione di Hausdorff, nel senso che uno spazio T_2 è anche uno spazio T_1 ed uno spazio T_1 è anche uno spazio T_0. Enunceremo ora un assioma di separazione, l'assioma T_3, che è piú forte dell'assioma T_2, nel senso che uno spazio T_3 è anche uno spazio T_2. Premettiamo la proposizione seguente:

Proposizione 4.7. *In uno spazio topologico X le seguenti due proprietà sono equivalenti*:

a) *se F è un chiuso di X ed x un punto di X non appartenente a F, esistono un intorno di x ed un intorno di F i quali sono disgiunti*;

b) *gli intorni chiusi di ogni punto $x \in X$ costituiscano un sistema fondamentale di intorni.*

Dimostrazione. Proviamo che da a) segue b). Se U è un intorno aperto di x, $\complement U$ è chiuso. Quindi, per a), esiste un intorno V di x ed un intorno aperto W di $\complement U$ tale che $V \cap W = \emptyset$, ossia

$$V \subset \complement W.$$

Poiché $\complement W$ è chiuso e $\complement W \subset U$ risulta

$$\bar{V} \subset \complement W \subset U,$$

e questo prova la b).

Mostriamo che da b) segue a). Poiché F è chiuso, $\complement F$ è aperto. Essendo $x \notin F$, risulta $x \in \complement F$. Dunque $\complement F$ è un intorno di x. Per b) esiste un intorno chiuso N di x tale che

$$N \subset \complement F$$

ossia

$$F \subset \complement N.$$

Poiché $\complement N$ è aperto, $\complement N$ è un intorno di F. Poiché $N \cap \complement N = \emptyset$, la a) è dimostrata.

Q.E.D.

Definizione 4.8. Lo spazio topologico X dicesi ***regolare*** (o T_3) se esso è T_1 e se valgono in X l'una o l'altra delle condizioni a) e b).

Dalla proposizione 4.7 segue che uno spazio regolare (o T_3) è anche uno spazio T_2 [basta, nella a), prendere $F = \{y\}$].

Esempi

[4.8] Un insieme X dotato della topologia discreta è uno spazio regolare.

[4.9] Ogni spazio metrico è uno spazio regolare. Infatti, se $x \in X$, un disco di centro x e raggio ε contiene le chiusure dei dischi di centro x e raggio minore di ε, ossia è verificata la b) della proposizione 4.7. Inoltre, per la proposizione 1.2, X è T_2, e quindi T_1.

[4.10] Ogni spazio omeomorfo ad uno spazio T_i ($i = 0, 1, 2, 3$) è uno spazio T_i.

[4.11] Ogni sottospazio di uno spazio T_3 è uno spazio T_3. Sia infatti X uno spazio T_3 ed Y un sottospazio di X. Sappiamo già che Y è T_1 (v. esempio 4.4); dimostriamo che vale la b) della proposizione 4.7. Sia $y \in Y$ ed U un intorno di y in Y. Esiste un intorno U' di y in X tale che $U = U' \cap Y$. Siccome X è regolare, esiste un intorno chiuso V' di y in X tale che $V' \subset U'$; ne segue che $V = V' \cap Y$ è un intorno di y in Y, chiuso in Y, che è contenuto in U.

[4.12] Il prodotto di due spazi T_3 è uno spazio T_3.

[4.13] Sia **R** l'insieme dei numeri reali e $\mathfrak{B}$ la famiglia dei seguenti sottoinsiemi di **R**:

1) $B \in \mathfrak{B}$ se B è un intervallo $]a, b[$;

2) $B \in \mathfrak{B}$ se B è l'intersezione di un intervallo $]a, b[$ con l'insieme **Q** dei numeri razionali.

La famiglia $\mathfrak{B}$ è manifestamente una base per una topologia τ su **R**, che è strettamente piú fine della topologia euclidea. Pertanto τ è una topologia T_2. Dimostriamo che **R**, con questa topologia, non è uno spazio T_3.

L'insieme **Q** dei numeri razionali è aperto in τ; l'insieme

$$F = \left\{ \sqrt{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{3}, \dots, \frac{\sqrt{2}}{n}, \dots \right\} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

è chiuso in τ. Infatti la chiusura di F nella topologia euclidea è $F \cup \{0\}$, e quindi $\bar{F} \subset F \cup \{0\}$; d'altra parte **Q** è un intorno di 0 che non interseca F, e quindi $F = \bar{F}$.

Facciamo vedere che 0 non possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi (ossia non vale b) della proposizione 4.7), dimostrando che per ogni $B \in \mathfrak{B}$ tale che $0 \in B$ si ha

$$\bar{B} \cap F \neq \emptyset \tag{1}$$

(e quindi non esiste $B \ni 0$, tale che $\bar{B} \subset \complement F$).

Basta osservare che, in entrambi i casi 1) e 2), $\bar{B}$ contiene un intervallo contenente 0, e ciò prova la (1).

Analogamente alla proposizione 1.7 per gli spazi di Hausdorff, vale per gli spazi T_3 la seguente proposizione:

Proposizione 4.9. *Se ogni punto di uno spazio topologico X ha un intorno chiuso, che sia regolare nella topologia indotta, allora X è uno spazio regolare.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 1.7 segue che X è uno spazio di Hausdorff. Dobbiamo dimostrare che se x è un punto di X ed U è un intorno di x, esiste un intorno chiuso V di x tale che $V \subset U$.

Sia F un intorno chiuso di x, che sia regolare e sia $U_1 = U \cap F$. Pertanto U_1 è un intorno di x in F. Per la proposizione 4.7 esiste un intorno chiuso V di x in F tale che $V \subset U_1$. Mostreremo che V è un intorno di x in X che è chiuso in X.

Siccome F è chiuso e V è chiuso in F, dalla proposizione 2.2, b) del capitolo secondo segue che $\boldsymbol{V}$ è chiuso.

Siccome V è intorno di x in F ed F è intorno di x in X, dalla proposizione 2.2, c) del capitolo secondo segue che V è un intorno di x. Q.E.D.

5. *Spazi normali*

Sia X uno spazio topologico.

Lemma 5.1. *Le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

1) *se F e G sono due qualsiansi chiusi disgiunti di X, F e G hanno due intorni disgiunti;*

2) *se F è un qualsiasi chiuso di X, ogni intorno U di F contiene un intorno chiuso di F.*

Dimostrazione. Proviamo che da 1) segue 2). Sia F un chiuso di X e sia U un intorno aperto di F. $\complement U$ è chiuso e disgiunto da F. Per la 1) esiste un intorno V di F ed un intorno aperto W di $\complement U$ tale che

$$V \cap W = \emptyset,$$

ossia

$$V \subset \complement W\,;$$

tenuto conto che $\complement W$ è chiuso, e che $\complement W \subset U$, si ha

$$\bar{V} \subset \complement W \subset U$$

e questo prova la 2).

Mostriamo che da 2) segue 1). Siano F e G due chiusi disgiunti di X. $\complement G$ è aperto e contiene F, dunque è un intorno di F. Per la 2) esiste un intorno chiuso V di F tale che

$$F \subset V \subset \complement G.$$

Ne segue che

$$G \subset \complement V.$$

$\complement V$, essendo aperto, è un intorno di G. Poiché V e $\complement V$ sono disgiunti, la 1) è dimostrata. Q.E.D.

Per la proposizione 4.3, X è T_1 se, e soltanto se, ogni punto di X è chiuso. Dal lemma 5.1 segue pertanto la

Proposizione 5.2. *Se X soddisfa all'una o all'altra delle condizioni* 1) *e* 2) *del lemma* 5.1, *ed è T_1, X è uno spazio T_3* (in particolare X è uno spazio di Hausdorff).

Esempio

[5.1] Uno spazio topologico X che ha le proprietà 1), 2) del lemma 5.1 non è necessariamente uno spazio T_1 (e quindi non è nemmeno uno spazio di Hausdorff).

Un esempio banale è il seguente. Supponiamo che un insieme X contenga almeno due punti; gli insiemi $\emptyset$ e X sono disgiunti, e simultaneamente aperti e chiusi. D'altra parte se si pone in X la topologia indiscreta, X non è di Hausdorff, e vale la condizione 2) del lemma 5.1.

Definizione 5.3. Lo spazio topologico X dicesi *normale* (o T_4) se esso è T_1 e se due chiusi disgiunti qualsiansi di X hanno intorni disgiunti.

Possiamo riassumere le considerazioni precedenti dicendo che se X è normale, X è regolare (e quindi di Hausdorff). Inoltre uno spazio T_1 è normale se, e soltanto se, ogni intorno di un chiuso qualsiasi F di X contiene un intorno chiuso di F.

Ogni spazio topologico omeomorfo ad uno spazio normale, è normale.

Gli spazi topologici con la topologia discreta sono spazi normali. Un'ampia classe di spazi normali è messa in luce dalla seguente:

Proposizione 5.4. *Ogni spazio metrico è uno spazio normale.*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dalla proposizione 1.2 segue che X è uno spazio T_2 e quindi T_1.

Mostriamo che vale la 1) del lemma 5.1. Siano F e G due chiusi disgiunti di X; per la proposizione 5.10 del capitolo primo le funzioni a valori reali su X

f: $X \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = d(x, F)$ per ogni $x \in X$
g: $X \to \mathbf{R}$ definita da $g(x) = d(x, G)$ per ogni $x \in X$

sono continue, quando $\mathbf{R}$ è la retta reale.

Pertanto è continua la funzione

$$\varphi = f - g \quad \text{a valori reali su } X.$$

I sottoinsiemi di X:

$$A = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[) = \{x \in X \mid d(x, F) < d(x, G)\}$$
$$B = \varphi^{-1}(]0, +\infty[) = \{x \in X \mid d(x, G) < d(x, F)\}$$

sono aperti e disgiunti. Proveremo che

$$F \subset A\,; \qquad G \subset B.$$

Sia $x_0 \in F$; ne segue $d(x_0, F) = 0$. Siccome G è disgiunto da F, risulta $x_0 \notin G$; d'altra parte (v. esempio 6.5 del capitolo primo) si ha $d(x, G) = 0$ se, e soltanto se, $x \in G$, perché G è chiuso. Dunque $d(x_0, G) > 0$ e ciò prova che $x_0 \in A$. Nello stesso modo si vede che $G \subset B$. Q.E.D.

6. *Spazi topologici a base numerabile. Spazi separabili*

In questo paragrafo ci occuperemo degli spazi topologici, che hanno una base di aperti numerabile.

Definizione 6.1. Si dice che uno spazio topologico X soddisfa al *primo assioma di numerabilità*, se ogni punto x di X ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Esempi

[6.1] Ogni insieme X con la topologia discreta soddisfa al primo assioma di numerabilità (v. esempio 5.3 del capitolo primo).

[6.2] Ogni spazio metrico X soddisfa al primo assioma di numerabilità.

Infatti (v. esempio 5.1 del capitolo primo) la famiglia di dischi $\{S_n = S(x, 1/n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, è un sistema fondamentale di intorni numerabile di x per ogni $x \in X$.

[6.3] In uno spazio metrico X, il sistema fondamentale di intorni di x $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$ dell'esempio 6.2 ha la proprietà

$$S_n \supset S_{n+1} \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots$$

Se X è uno spazio topologico che soddisfa al primo assioma di numerabilità, per ogni $x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni numerabile $\{U_n\}_{n=1,2,\ldots}$ tale che $U_n \supset U_{n+1}$ per $n = 1, 2, \ldots$.

Sia infatti $\{V_n\}_{n=1,2,\ldots}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile di x; basta prendere

$$U_n = \bigcap_{1 \leq h \leq n} V_h.$$

[6.4] Lo spazio topologico prodotto $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ dell'esempio 7.3 del capitolo secondo non soddisfa al primo assioma di numerabilità.

Definizione 6.2. Si dice che uno spazio topologico X soddisfa al *secondo assioma di numerabilità*, oppure che *è a base numerabile* se esiste una base di aperti numerabile per la topologia di X.

Dalla proposizione 5.8 del capitolo primo segue subito che

Proposizione 6.3. *Uno spazio topologico X a base numerabile soddisfa al primo assioma di numerabilità.*

Esempi

[6.5.] Esistono spazi metrici che non sono a base numerabile. Ad esempio l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali con la topologia discreta (v. esempio 4.2 del capitolo primo, ed esercizio 14 del capitolo primo).

[6.6] Sia X uno spazio topologico che soddisfa al primo (oppure al secondo) assioma di numerabilità. Ogni sottospazio di X soddisfa al primo (oppure al secondo) assioma di numerabilità.

[6.7] Sia $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ una famiglia numerabile di spazi topologici che soddisfano al primo (oppure al secondo) assioma di numerabilità. Il prodotto topologico $X = \prod_{n=1,2,\dots} X_n$ soddisfa al primo (oppure al secondo) assioma di numerabilità.

[6.8] La retta reale $\mathbf{R}$ è a base numerabile. Una base numerabile di $\mathbf{R}$ è la famiglia degli intervalli $]p, q[$ con p, q razionali.

[6.9] Dall'esempio 6.8 segue che: l'$\mathbf{R}^n$ euclideo è a base numerabile; gli spazi metrici $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ ed $I^{\mathbf{N}^*}$ studiati nel paragrafo 7 del capitolo secondo sono a base numerabile.

Teorema 6.4 (di Lindelöff). *Se lo spazio topologico X è a base numerabile, per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di aperti di X, esiste una sottofamiglia numerabile $\{A_{i_n}\}_{n=1,2,\dots}$ tale che*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n=1,2,\dots} A_{i_n}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n=1,2,\dots}$ una base numerabile di X e sia $\mathfrak{B}^0$ la sottofamiglia degli elementi di $\mathfrak{B}$ che sono contenuti in qualche aperto A_i. In altre parole gli elementi di $\mathfrak{B}^0$ sono gli aperti $B_n^0 \in \mathfrak{B}$ per i quali esiste $i_n \in I$ tale che

$$B_n^0 \subset A_{i_n}.$$

La famiglia $\{A_{i_n}\}_{n=1,2,\dots}$ è numerabile. Inoltre

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supset \bigcup_{n=1,2,\dots} A_{i_n} \supset \bigcup_{n=1,2,\dots} B_n^0.$$

Poiché $\mathfrak{B}$ è una base ed i sottoinsiemi A_i sono aperti, per ogni $i \in I$ ed ogni $x \in A_i$ esiste $B_n^0 \in \mathfrak{B}^0$ tale che $x \in B_n^0 \subset A_i$. Ne segue:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{n=1,2,\dots} B_n^0$$

che, confrontata con la precedente, permette di concludere che

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n=1,2,\dots} A_{i_n}.$$

Q.E.D.

Definizione 6.5. Uno spazio topologico X si dice *separabile* (o la topologia di X si dice separabile), se X contiene un insieme numerabile e denso.

Esempi

[6.10] La retta reale $\mathbf{R}$ è separabile (contiene l'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali che è numerabile e denso in $\mathbf{R}$).

[6.11] Il prodotto topologico di una famiglia numerabile di spazi separabili è uno spazio separabile (per il prodotto di due spazi separabili, v. l'esercizio 9 del capitolo secondo). In particolare $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$, $I^{\mathbf{N}^*}$ (v. esempio 6.9) sono spazi separabili.

Proposizione 6.6. *Se uno spazio topologico X è a base numerabile, esso è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una base numerabile di X. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ scegliamo un punto $x_n \in B_n$. Dalla proposizione 6.10 del capitolo primo segue che l'insieme numerabile $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}$ è denso in X. Infatti ogni aperto A non vuoto di X è unione di elementi di $\mathfrak{B}$, e, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$B_n \cap D \ni x_n \quad \text{ossia} \quad B_n \cap D \neq \emptyset.$$

Ne segue $A \cap D \neq \emptyset$ per ogni aperto non vuoto A di X.

Q.E.D.

L'inversa della proposizione precedente non sussiste in generale. Vale tuttavia la

Proposizione 6.7. *Se lo spazio topologico X è metrizzabile e separabile, allora X è a base numerabile.*

Dimostrazione. Sia d una distanza su X che induce su X la topologia data e sia $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}$ un insieme numerabile e denso in X. Per ogni numero naturale n, ed ogni numero razionale $q > 0$ sia $S_{n,q} = S(x_n, q)$ il disco di centro x_n e raggio q. La famiglia $\mathfrak{B} = \{S_{n,q}\}$ è una famiglia numerabile di aperti di X. Dimostriamo che $\mathfrak{B}$ è una base per la topologia di X.

Sia A un aperto di X ed x un punto di A. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che il disco $S(x, \varepsilon)$ è contenuto in A. Siccome D è denso in X, esiste

$n \in \mathbf{N}$ tale che $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}$. Sia q un numero razionale tale che

$$\frac{\varepsilon}{4} < q < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

esso esiste perché l'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali è denso in $\mathbf{R}$.
Basta dimostrare che

$$x \in S_{n,q} \subset S(x, \varepsilon).$$

Per ogni $y \in X$ segue dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{4} + d(x_n, y).$$

Siccome $d(x, x_n) < q$, si ha $x \in S_{n,q}$; se $y \in S_{n,q}$ si ha

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{4} + q < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ e quindi } y \in S(x, \varepsilon).$$

Q.E.D.

Mentre il prodotto di due spazi separabili è uno spazio separabile, non è detto che un sottospazio di uno spazio separabile sia uno spazio separabile.

Dalla proposizione 6.7 segue però che:

Corollario 6.8. *Se X è uno spazio metrico separabile, ogni sottospazio Y di X è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una base numerabile di X. La famiglia $\mathfrak{B}_Y = \{B_n \cap Y\}_{n \in \mathbf{N}}$ è una base numerabile per la topologia di Y. Per la proposizione 6.6, Y è separabile. Q.E.D.

Esempi

[6.12] Sia X l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base gli insiemi $[a, b[$, con $a < b$. Lo spazio X è separabile ma non è a base numerabile. (L'insieme dei razionali è denso in X; se X fosse a base numerabile $X \times X$ avrebbe la stessa proprietà, e quindi ogni suo sottospazio sarebbe separabile mentre

$$\Delta' = \{(x, y) \in X \times X \mid x = -y\}$$

non è separabile.)

[6.13] Lo spazio $X \times X$ dell'esempio precedente è separabile ma ha sottospazi non separabili.

L'assioma di separazione T_4 è piú forte dell'assioma di separazione T_3, ossia esistono spazi regolari che non sono normali. Vale però il

Teorema 6.9. *Uno spazio regolare a base numerabile è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio regolare e sia $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una base numerabile di X. Siano F e G due chiusi disgiunti di X.

Indicheremo con U un elemento di $\mathfrak{B}$ quando

(1) $\qquad \bar{U} \cap G = \emptyset$, ossia quando $\bar{U} \subset \complement G$;

indicheremo con V un elemento di $\mathfrak{B}$ quando

(2) $\qquad \bar{V} \cap F = \emptyset$, ossia quando $\bar{V} \subset \complement F$.

La famiglia degli aperti U per cui vale la (1) è una sottofamiglia $\mathfrak{U}$ di $\mathfrak{B}$; quindi è numerabile e possiamo porre $\mathfrak{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$; analogamente si indicherà con $\mathfrak{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ la famiglia degli aperti V per cui vale la (2).

Dimostriamo anzitutto che:

(3) $\qquad$ per ogni $x \in F$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in U_n$

(4) $\qquad$ per ogni $x \in G$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in V_n$.

Siccome F e G sono disgiunti, se $x \in F$, x è un punto dell'aperto $\complement G$. Siccome X è regolare e $\mathfrak{B}$ è una base di X, esiste un elemento $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B \subset \bar{B} \subset \complement G$. Pertanto B è un elemento di $\mathfrak{U}$, ossia è vera la (3); analogamente si procede per la (4).

Dalle (3) e (4) segue che

$$F \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n, \qquad G \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} V_n.$$

Però gli aperti $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n$ e $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} V_n$ possono non essere disgiunti.

Definiamo per ricorrenza gli aperti H_n e L_n ($n \in \mathbf{N}$) ponendo

$$H_0 = U_0, \quad L_0 = V_0 - \bar{H}_0$$

$$H_n = U_n - \bigcup_{h=0}^{n-1} \bar{L}_h, \quad L_n = V_n - \bigcup_{h=0}^{n} \bar{H}_h.$$

Dimostriamo che gli aperti

$$H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n\,, \qquad L = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n$$

hanno le proprietà:

$$H \cap L = \emptyset\,, \qquad F \subset H\,, \qquad G \subset L\,.$$

Si dimostra che $H \cap L = \emptyset$ provando che $H_n \cap L_m = \emptyset$ per ogni n, $m \in \mathbf{N}$. Se $n \leqslant m$, si ha:

$$L_m = V_m - \bigcup_{h=0}^{m} \bar{H}_h \subset V_m - H_n$$

e quindi $H_n \cap L_m = \emptyset$.

Se invece $n > m$, si ha

$$H_n = U_n - \bigcup_{h=0}^{n-1} \bar{L}_h \subset U_n - L_m$$

e quindi ancora $H_n \cap L_m = \emptyset$.

Dimostriamo che $F \subset H$. Sia $x \in F$ e sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in U_n$. Per ogni $m \in \mathbf{N}$ si ha $\bar{L}_m \subset \bar{V}_m \subset \complement F$ e quindi $\bar{L}_m \cap F = \emptyset$. Ne segue

$$H_n \cap F = (U_n - \bigcup_{h=1}^{n-1} \bar{L}_h) \cap F = U_n \cap F$$

e quindi $x \in H_n \subset H$.

Analogamente si prova che $G \subset L$. Q.E.D.

Esercizi

1. La sfera S^n di $\mathbf{R}^n$: $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ è uno spazio di Hausdorff.

2. Se $(A_i)_{i \in I}$ è una partizione dello spazio topologico X tale che:

1) A_i sia aperto per ogni $i \in I$;
2) il sottospazio A_i sia di Hausdorff per ogni $i \in I$,

allora X è di Hausdorff.

3. Sia 0 l'origine di $\mathbf{R}^2$, $X = \mathbf{R}^2 - \{0\}$, A il cerchio $x^2 + y^2 = 1$. Costruire un'applicazione continua $f\colon X \to A$, tale che $f_{|A} =$ identità su A.

Sia X uno spazio di Hausdorff, A un sottospazio di X, $f\colon X \to A$ un'applicazione continua di X in A, la cui restrizione ad A è l'applicazione identica su A. Dimostrare che:

a) f è surgettiva;
b) A è un chiuso di X.

4. Sia X lo spazio topologico dell'esempio 2.4, 2), ed $\mathfrak{R}$ la relazione di equivalenza ivi considerata. Determinare il sottoinsieme R di $X \times X$ definito da $\mathfrak{R}$ e verificare che non è chiuso nella topologia prodotto di $X \times X$.

5. Siano $f\colon X \to Z$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni continue degli spazi topologici X, Y nello spazio di Hausdorff Z. Il sottoinsieme

$$P = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

è un chiuso della topologia prodotto di $X \times Y$. (Le applicazioni $F\colon X \times Y \to Z$ definita da $F(x, y) = f(x)$, e $G\colon X \times Y \to Z$ definita da $G(x, y) = g(y)$ sono continue.)

6. Sia $X = [0, 2] \cup [4, 6]$ con la topologia indotta dalla retta reale. In X la relazione

$$x\,\mathfrak{R}\,y \text{ significa } \begin{cases} y = x & \text{se } x \in [1, 2] \cup [5, 6] \\ y = x + 4 & \text{se } x \in [0, 1[\\ y = x - 4 & \text{se } x \in [4, 5[\end{cases}$$

è una relazione di equivalenza. X è T_2, $X/\mathfrak{R}$ è T_1; se π è la proiezione naturale sul quoziente, $\pi(1)$ e $\pi(5)$ sono i due soli punti di $X/\mathfrak{R}$ per i quali non esistono intorni disgiunti.

7. Sia X uno spazio di Hausdorff, F un chiuso di X, Y lo spazio quoziente di X, ottenuto da X identificando ad un punto i punti di F. Dimostrare che Y è uno spazio T_1.

Se in piú X è uno spazio T_3, allora Y è uno spazio di Hausdorff.

8. Se $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sono due applicazioni surgettive e crescenti della retta reale in sé, ed $f(q) = g(q)$ per ogni $q \in \mathbf{Q}$, allora $f = g$.

9. Sia X uno spazio T_1 che contiene almeno due punti e sia $\mathfrak{B}$ una base di X che contiene X come suo elemento. Allora $\mathfrak{B} - \{X\}$ è una base di X. (Basta provare che X è unione di elementi di $\mathfrak{B} - \{X\}$.)

10. Il prodotto topologico di una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di spazi T_0 (oppure T_1) è uno spazio T_0 (oppure T_1.)

11. Se X è uno spazio T_1 senza punti isolati, ogni aperto non vuoto di X contiene infiniti punti.

12. Sia X uno spazio topologico che ha una delle due proprietà a), b) della proposizione 4.7 ma non è uno spazio T_1. Dimostrare che:

1) se A è un aperto, oppure un chiuso di X, e $x \in A$, allora $\bar{x} \subset A$;
2) la relazione in X:

$$x \,\Re\, y \qquad \text{significa} \qquad x \in \bar{y}$$

è una relazione di equivalenza in X;
3) lo spazio quoziente $X/\Re$ è uno spazio T_1.

13. Sia X uno spazio T_4, F un chiuso di X, Y lo spazio quoziente di X, ottenuto da X identificando ad un punto i punti di F. Dimostrare che Y è uno spazio T_3.

14. Sia X uno spazio topologico, $\{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi di X con le seguenti proprietà:

1) il sottospazio F_i è metrizzabile per ogni $i \in I$;
2) $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{F}_i = X$.

Allora X è uno spazio T_3. (Segue dalla proposizione 4.9.)

15. L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali con la topologia che ha per chiusi, oltre $\mathbf{R}$, i sottoinsiemi finiti di $\mathbf{R}$, non soddisfa al primo assioma di numerabilità. (Se $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di 0, risulta $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n = \{0\}$, e quindi $\mathbf{R} - \{0\}$ sarebbe numerabile.)

16. Se lo spazio topologico X è a base numerabile, ogni ricoprimento aperto di X contiene un sottoricoprimento numerabile.

17. Se lo spazio topologico X è a base numerabile e $\mathfrak{B}$ è una base di X, esiste una sottofamiglia numerabile di $\mathfrak{B}$ che è ancora una base. (Se Σ è una base numerabile di X ed $S \in \Sigma$, si considera il ricoprimento di S mediante tutti gli elementi di $\mathfrak{B}$ contenuti in S e si tiene conto del teorema di Lindelöff per ogni $S \in \Sigma$.)

18. In un insieme X la topologia discreta ha una base numerabile se, e soltanto se, X è numerabile.

19. Se f: $X \to Y$ è un'applicazione continua, surgettiva e aperta di uno spazio a base numerabile X su uno spazio topologico Y, allora Y è a base numerabile.

20. Ogni spazio quoziente di uno spazio separabile X è uno spazio separabile (v. esercizio 37 del capitolo primo).

21. Sia f: $X \to Y$ un'applicazione continua e surgettiva dello spazio topologico X sullo spazio topologico Y. Se X è uno spazio a base numerabile, allora ogni sottospazio di Y è separabile.

Capitolo quarto

Connessione

1. *Spazi ed insiemi connessi*

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X dicesi *connesso*, se esso non è unione di due aperti A, B non vuoti e disgiunti.

Esempi

[1.1] Un insieme X con almeno due punti e la topologia discreta non è connesso. Un insieme X con la topologia indiscreta è connesso.

[1.2] Un insieme X infinito con la topologia che ha per chiusi (oltre X) i sottoinsiemi finiti di X, è connesso (due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota).

[1.3] Se X è uno spazio topologico connesso, esso resta connesso in ogni topologia meno fine di quella data.

Siccome i chiusi sono i complementari degli aperti, si constata immediatamente che:

Proposizione 1.2. *Lo spazio X non è connesso se, e soltanto se, è verificata una delle due condizioni seguenti:*

a) *esiste in X un sottoinsieme A diverso da $\emptyset$ e da X, che è simultaneamente aperto e chiuso;*
b) *esistono due chiusi non vuoti e disgiunti F, G, tali che $X = F \cup G$.*

La connessione può essere caratterizzata anche con la proprietà seguente:

Proposizione 1.3. *Lo spazio X è connesso se, e soltanto se, per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di X, tali che $X = A \cup B$, risulta*

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \neq \emptyset.$$