Capitolo secondo

Sottospazi. Prodotti. Quozienti

1. *Immagine inversa di una topologia*

Sia f: $Y \to X$ un'applicazione dell'insieme Y nello spazio topologico (X, τ). Esistono topologie τ' su Y per le quali f è continua (ad esempio la topologia discreta di Y che, fra tutte, è la piú fine). Sia $f^{-1}(\tau)$ la famiglia delle immagini inverse degli aperti di τ mediante f; la proposizione seguente caratterizza la topologia τ_f di Y meno fine tra le topologie τ' per le quali f è continua.

Proposizione 1.1. *La famiglia $f^{-1}(\tau)$ di sottoinsiemi di Y è una topologia su Y; precisamente è la topologia τ_f meno fine tra le topologie τ' su Y per le quali f è continua, ossia $B \in \tau_f$ se, e soltanto se, esiste $A \in \tau$ tale che $B = f^{-1}(A)$.*

Dimostrazione. La famiglia $f^{-1}(\tau)$ è contenuta in ogni topologia τ' per la quale f è continua. Per la proposizione 3.5 del capitolo primo la topologia τ_f è generata da $f^{-1}(\tau)$. Resta quindi da provare che gli elementi di $f^{-1}(\tau)$ soddisfano agli assiomi a), b), c) della definizione 1.1 del capitolo primo degli aperti di una topologia.

Siccome $\emptyset$, $X \in \tau$ ne segue che $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ ed $Y = f^{-1}(X)$ appartengono ad $f^{-1}(\tau)$. Inoltre:

$$B = \bigcup_i f^{-1}(A_i), \text{ ed } A_i \in \tau \Rightarrow B = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) \text{ ed } \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau;$$

$$B = f^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(A_n) \text{ ed } A_h \in \tau \Rightarrow B = f^{-1}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$
ed $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$. Q.E.D.

Diremo che la topologia τ_f di Y è l'immagine inversa mediante f della topologia τ di X.

Sia σ la famiglia dei chiusi dello spazio topologico X; poiché per ogni sottoinsieme A di X risulta

$$\complement f^{-1}(A) = f^{-1}(\complement A),$$

dalla proposizione 1.1 segue subito che:

Proposizione 1.2. *La famiglia $f^{-1}(\sigma)$ delle immagini inverse dei chiusi di X è la famiglia dei chiusi della topologia τ_f di Y, ossia F è un chiuso di Y se, e soltanto se, esiste un chiuso E di X tale che*

$$F = f^{-1}(E).$$

Sia $\mathfrak{B}$ una base della topologia di X e sia $\mathfrak{C} = f^{-1}(\mathfrak{B})$ la famiglia dei sottoinsiemi di Y immagini inverse mediante f di elementi di $\mathfrak{B}$. Dalla

$$\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$$

e dalla proposizione 1.1 segue che:

Proposizione 1.3. *Se $\mathfrak{B}$ è una base della topologia di X, la famiglia $\mathfrak{C} = f^{-1}(\mathfrak{B})$ è una base della topologia τ_f di Y.*

Per ogni sottoinsieme A di X sia $\bar{A}$ la chiusura di A nella topologia τ, e per ogni sottoinsieme B di Y sia $\bar{B}$ la chiusura di B nella topologia τ_f. Vale al riguardo la

Proposizione 1.4.
$$\bar{B} = f^{-1}[\overline{f(B)}].$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 6.8 del capitolo primo segue

$$f(\bar{B}) \subset \overline{f(B)},$$

e quindi

$$\bar{B} \subset f^{-1}[f(\bar{B})] \subset f^{-1}[\overline{f(B)}].$$

Dimostriamo l'inclusione opposta:

$$f^{-1}[\overline{f(B)}] \subset \bar{B}.$$

Per la proposizione 1.2 esiste un chiuso F di X tale che $\bar{B} = f^{-1}(F)$;

basta dimostrare che $\overline{f(B)} \subset F$. Da $B \subset \bar{B}$ segue

$$f(B) \subset f(\bar{B}) = f[f^{-1}(F)] \subset F$$

e quindi

$$\overline{f(B)} \subset \bar{F} = F \quad \text{(perché } F \text{ è chiuso).} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Per ogni $x \in X$, sia $\mathfrak{U}(x)$ un sistema fondamentale di intorni di x (in particolare il sistema di tutti gli intorni di x). Per ogni $y \in Y$ sia $\mathfrak{U}^*(y) = f^{-1}[\mathfrak{U}(f(y))]$ la famiglia delle immagini inverse mediante f degli elementi di $\mathfrak{U}(f(y))$.

Proposizione 1.5. *Per ogni $y \in Y$ la famiglia $\mathfrak{U}^*(y)$ è un sistema fondamentale di intorni di y; ossia V è un intorno di $y \in Y$ nella topologia τ_f se, e soltanto se, esiste $U \in \mathfrak{U}(f(y))$ tale che*

$$f^{-1}(U) \subset V.$$

Dimostrazione. Sia $U \in \mathfrak{U}(f(y))$; siccome f è continua, $f^{-1}(U)$ è un intorno di y e quindi è intorno di y ogni sottoinsieme V che contiene $f^{-1}(U)$. Supponiamo inversamente che V sia un intorno di y; esiste quindi un aperto B della topologia τ_f tale che $y \in B \subset V$. Per la proposizione 1.1 esiste un aperto A di X tale che $B = f^{-1}(A)$; siccome $f(y) \in A$, esiste $U \in \mathfrak{U}(f(y))$ contenuto in A; ne segue

$$f^{-1}(U) \subset f^{-1}(A) = B \subset V. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Sia g: $Z \to Y$ un'applicazione dell'insieme Z nell'insieme Y ed f: $Y \to X$ un'applicazione dell'insieme Y nello spazio topologico (X, τ); sia infine τ_f la topologia di Y immagine inversa mediante f della topologia τ di X, ed $f \circ g$: $Z \to X$ l'applicazione prodotto di g per f dell'insieme Z nello spazio topologico X. Sull'insieme Z risultano definite due topologie: la topologia $\tau_1 = \tau_{f \circ g}$ immagine inversa mediante $f \circ g$ della topologia τ di X e la topologia $\tau_2 = (\tau_f)_g$ immagine inversa mediante g della topologia τ_f di Y. Per queste due topologie vale la proposizione seguente:

Proposizione 1.6. *La topologia $(\tau_f)_g$ di Z, immagine inversa mediante g della topologia τ_f di Y* (immagine inversa mediante f della topologia τ di X), *coincide con la topologia $\tau_{f \circ g}$, immagine inversa mediante $f \circ g$ della topologia τ di X.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.1, un sottoinsieme C di Z

è un aperto della topologia $\tau_{f \circ g}$ se, e soltanto se, esiste un aperto A della topologia τ di X tale che $C = (f \circ g)^{-1}(A)$.

D'altra parte

$$(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}[f^{-1}(A)]$$

e quindi C è un aperto di $\tau_{f \circ g}$ se, e soltanto se, esiste un aperto B della topologia τ_f di Y tale che $C = g^{-1}(B)$. Q.E.D.

2. *Sottospazi di uno spazio topologico*

Sia Y un sottoinsieme di uno spazio topologico X, e sia i: $Y \to X$ l'applicazione identica di Y in X. Consideriamo su Y la topologia immagine inversa della topologia di X mediante i.

Tale topologia è la topologia meno fine di Y rispetto alla quale i: $Y \to X$ è un'applicazione continua. La chiamiamo la *topologia indotta* in Y dalla topologia di X.

Sia A un sottoinsieme di X; è fondamentale, in questo paragrafo, la relazione seguente:

$$(1) \qquad i^{-1}(A) = A \cap Y.$$

Tenuto conto della (1), segue dal paragrafo 1 che la topologia indotta in Y dalla topologia di X è definita nel modo seguente:

Definizione 2.1. La topologia indotta in Y dalla topologia di X è la topologia in cui un sottoinsieme $A \subset Y$ è aperto se, e soltanto se, esiste un aperto B di X tale che $A = B \cap Y$. L'insieme Y, munito della topologia indotta in Y dalla topologia di X, prende il nome di *sottospazio* di X.

Sono immediate conseguenze delle proposizioni corrispondenti del paragrafo 1 gli enunciati seguenti:

1. *Se $Z \subset Y \subset X$, il sottospazio Z di X coincide con il sottospazio Z del sottospazio Y di X.*

2. *Se $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ è una base della topologia su X, la famiglia di aperti $\mathfrak{B}_Y = \{B_i \cap Y\}_{i \in I}$ del sottospazio Y di X è una base per la topologia indotta su Y dalla topologia di X.*

3. *I chiusi del sottospazio Y dello spazio topologico X sono tutte e sole le intersezioni con Y dei chiusi di X.*

4. *Se $y \in Y$, un sottoinsieme $V \subset Y$ è un intorno di y in Y se, e solo*

se, esiste un intorno U di y in X tale che $V = U \cap Y$. (La proposizione 1.5 assicura che, se U è un intorno di y in X, $V = U \cap Y$ è un intorno di y in Y, e che, se V è un intorno di y in Y, esiste un intorno U' di y in X tale che $U' \cap Y \subset V$. Il sottoinsieme $U = U' \cup V$ è un intorno di y in X e manifestamente $V = U \cap Y$.)

Sia $\bar{A}^Y$ la chiusura di A in Y ed $\bar{A}$ la chiusura di A in X; si ha:

5. *Se $A \subset Y$, allora $\bar{A}^Y = \bar{A} \cap Y$.*

Per la proposizione 6.3 del capitolo primo, si ha anche:

5'. *Sia $A \subset Y$; i punti di Y aderenti ad A in Y sono tutti e soli i punti che stanno in Y e sono aderenti ad A in X.*

Osserviamo che un aperto A di Y non è necessariamente aperto in X. Vale a questo riguardo la

Proposizione 2.2. *Condizione necessaria e sufficiente perché:*

a) *ogni aperto di Y sia aperto in X, è che Y sia un aperto di X;*

b) *ogni chiuso di Y sia chiuso in X, è che Y sia chiuso in X;*

c) *ogni intorno di un punto $y \in Y$ in Y sia intorno di y in X, è che Y sia un intorno di y.*

Dimostrazione. Se Y è aperto (o chiuso, od un intorno di y) in X, ogni aperto (o chiuso od ogni intorno di y) in Y, come intersezione di Y con un altro aperto (o chiuso od un altro intorno di y) in X, è aperto (o chiuso, od un intorno di y) in X. Inversamente, se ogni aperto (o chiuso od ogni intorno di y) in Y è un aperto (o chiuso od un intorno di y) in X, Y stesso, come aperto (o chiuso od intorno di y) in Y, è aperto (o chiuso od un intorno di y) in X.

Q.E.D.

Esempi

[2.1] Sia X uno spazio metrico con distanza $d(x, y)$. Sia Y un sottoinsieme di X. L'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ definisce per restrizione un'applicazione $d'\colon Y \times Y \to \mathbf{R}$ che è ancora una distanza. I dischi di centro $y \in Y$ e raggio ε in Y sono le intersezioni di Y con i dischi di centro y e raggio ε in X. La topologia definita in Y dalla distanza d' è la topologia indotta in Y dalla topologia definita dalla distanza d in X.

[2.2] La topologia indotta dalla topologia della retta reale $\mathbf{R}$ nell'insieme $\mathbf{Z}$ degli interi relativi è la topologia discreta. La topologia

indotta dalla topologia della retta reale $\mathbf{R}$ nell'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è la topologia della retta razionale.

[2.3] Nell'insieme $\mathbf{R}^n$ delle n-ple $(x_1, \dots, x_n)$ di numeri reali con la topologia euclidea il sottospazio delle n-ple $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ $(k < n)$ ha la topologia euclidea di $\mathbf{R}^k$.

[2.4] Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X; un sottoinsieme Z di Y è denso in Y se, e soltanto se, $\bar{Z} = \bar{Y}$ (in X). Infatti da $Z \subset Y$ segue $\bar{Z} \subset \bar{Y}$ e da $\bar{Z}^Y = Y$ segue $\bar{Z} \supset Y$ e quindi $\bar{Z} \supset \bar{Y}$.

[2.5] Sia D un sottospazio denso dello spazio topologico X. Se $x \in D$ ed U è un intorno di x in D, $\bar{U}$ è un intorno di x in X.

Sia infatti B un aperto in D tale che $x \in B \subset U$ e sia A un aperto di X tale che $B = A \cap D$. Ne segue $\bar{B} = \overline{A \cap D} = \bar{A} \subset \bar{U}$.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi dello spazio topologico X e sia $\mathring{U}_i$ la parte interna di U_i.

Proposizione 2.3. *Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che $\{\mathring{U}_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento di X (in particolare sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto, ossia costituito da aperti, di X). Un sottoinsieme A di X è aperto (oppure chiuso), se e soltanto se, per ogni $i \in I$, $A \cap U_i$ è un aperto (rispettivamente un chiuso) di U_i.*

Dimostrazione. Se A è un aperto, oppure F è un chiuso, allora $A \cap U_i$ è un aperto di U_i ed $F \cap U_i$ è un chiuso di U_i, e ciò per ogni $i \in I$.

Supponiamo inversamente che $A \cap U_i$ sia aperto in U_i per ogni $i \in I$. Siccome $\mathring{U}_i$ è aperto in U_i, allora $A \cap \mathring{U}_i$ è aperto in $\mathring{U}_i$ per ogni $i \in I$, e quindi è aperto in X, per la proposizione 2.2 a). D'altra parte $X = \bigcup_{i \in I} \mathring{U}_i$, e quindi

$$A = A \cap (\bigcup_{i \in I} \mathring{U}_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap \mathring{U}_i)$$

è un aperto di X, perché unione di una famiglia di aperti.

Supponiamo che $F \cap U_i$ sia chiuso in U_i per ogni $i \in I$; dimostriamo che F è chiuso, facendo vedere che $\complement F$ è aperto. Per quanto abbiamo già dimostrato, basta provare che $\complement F \cap U_i$ è aperto in U_i per ogni $i \in I$. Risulta

$$\complement F \cap U_i = U_i - F \cap U_i\,,$$

che è aperto in U_i.

Q.E.D.

Proposizione 2.4. *Sia* $\{F_i\}_{i\in I}$ *un ricoprimento chiuso, ossia costituito da chiusi, e localmente finito di* X. *Un sottoinsieme* F *è chiuso (oppure aperto) se, e soltanto se, per ogni* $i \in I$, $F \cap F_i$ *è un chiuso (rispettivamente un aperto) di* F_i.

Dimostrazione. Se F è un chiuso, oppure A è un aperto, allora $F \cap F_i$ è un chiuso di F_i ed $A \cap F_i$ è un aperto di F_i e ciò per ogni $i \in I$.

Supponiamo inversamente che $F \cap F_i$ sia chiuso per ogni $i \in I$. Siccome F_i è chiuso in X, per la proposizione 2.2 b) $F \cap F_i$ è un chiuso di X e quindi

$$F = F \cap (\bigcup_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I} (F \cap F_i)$$

è unione di una famiglia localmente finita di chiusi. Dalla proposizione 5.13 del capitolo primo segue che F è chiuso.

Supponiamo che $A \cap F_i$ sia aperto in F_i per ogni $i \in I$. Risulta

$$\complement A \cap F_i = F_i - A \cap F_i ,$$

che è chiuso in F_i. Per quanto abbiamo già dimostrato, $\complement A$ è chiuso in X e quindi A è aperto in X. Q.E.D.

Esempio

[2.6] X è uno spazio metrico, con la topologia indotta dalla distanza. Un sottoinsieme F di X è chiuso se, e soltanto se, per ogni disco S di raggio 1 l'intersezione $F \cap S$ è chiusa in S.

Definizione 2.5. Diremo che un sottoinsieme S dello spazio topologico X è *localmente chiuso in un punto* $x \in S$ se esiste un intorno U di x tale che $S \cap U$ sia un sottoinsieme chiuso del sottospazio U. Si dirà che S è *localmente chiuso*, se S è localmente chiuso in ogni suo punto.

Proposizione 2.6. *Un sottoinsieme* S *dello spazio topologico* X *è localmente chiuso se, e soltanto se,* S *è intersezione di un aperto e di un chiuso.*

Dimostrazione. Sia

$$S = F \cap A$$

con F chiuso ed A aperto in X. A è intorno di ogni suo punto,

ed in particolare di ogni punto x di S. $A \cap S = A \cap F$ è chiuso nell'intorno A di x.

Inversamente, se S è localmente chiuso per ogni punto $x \in S$, esiste un intorno *aperto* U_x di x tale che $S \cap U_x$ sia chiuso in U_x. Consideriamo il sottospazio

$$A = \bigcup_{x\in S} U_x$$

di X. Esso è un aperto di X. Inoltre U_x è aperto in A. Per la proposizione 2.3, S è chiuso nel sottospazio A. Pertanto esiste un chiuso F di X tale che

$$S = F \cap A.$$

Q.E.D.

Corollario 2.7. *Sia* $f\colon X \to X'$ *un'applicazione continua di uno spazio topologico* X *in uno spazio topologico* X'. *L'immagine inversa di ogni insieme localmente chiuso di* X' *è un insieme localmente chiuso di* X.

Esempi

[2.7] Un chiuso, oppure un aperto di uno spazio topologico X è un sottoinsieme localmente chiuso.

[2.8] L'insieme **Q** dei razionali non è un sottoinsieme localmente chiuso della retta reale **R**.

[2.9] Nel piano euclideo $\mathbf{R}^2$ l'intervallo aperto

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a < x < b;\ y = 0\}$$

è un sottoinsieme localmente chiuso.

Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione di uno spazio topologico X in uno spazio topologico X'. Sia $Y' \subset X'$ tale che $f(X) \subset Y'$. L'applicazione f può essere considerata come un'applicazione di X in Y'; precisamente possiamo definire l'applicazione

$$g\colon X \to Y'$$

ponendo $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

Se $i'\colon Y' \to X'$ denota l'applicazione identica di Y' in X' l'applicazione g è caratterizzata dalla proprietà

$$f = i' \circ g\colon X \to Y.$$

Dal fatto che Y' ha la topologia indotta da X' segue la:

Proposizione 2.8. *L'applicazione f è continua se, e soltanto se, è continua l'applicazione g di X nel sottospazio Y' di X'.*

Dimostrazione. Se g è continua, anche $f = i' \circ g$ è continua, perché prodotto di applicazioni continue.

Supponiamo f continua e dimostriamo che g è continua; per ogni aperto B' di Y' esiste un aperto A' di X' tale che

$$B' = A' \cap Y' = i'^{-1}(A').$$

Pertanto

$$g^{-1}(B') = g^{-1}[i'^{-1}(A')] = (i' \circ g)^{-1}(A') = f^{-1}(A')$$

che è un aperto di X. Q.E.D.

Sia ora Y un sottoinsieme di X, ed $i\colon Y \to X$ l'applicazione identica di Y in X.

Definizione 2.9. La *restrizione* di f a Y è l'applicazione $f_{|Y}\colon Y \to X'$ definita ponendo

$$f_{|Y}(y) = f(y) \quad \text{per ogni } y \in Y,$$

ossia

$$f_{|Y} = f \circ i\colon\ Y \to X'.$$

Pertanto, se $f\colon X \to X'$ è continua ed Y è un sottospazio di X, anche $f_{|Y}\colon Y \to X'$ è continua perché prodotto di due applicazioni continue.

Se $f_{|Y}\colon Y \to X'$ è continua in un punto y del sottospazio Y o è continua su tutto il sottospazio Y, diremo che f è rispettivamente, *continua rispetto a Y nel punto $y \in Y$ oppure continua rispetto a Y.*

Dunque, se $f\colon X \to X'$ è continua (continua in un punto $y \in Y$), f è continua rispetto al sottospazio Y di X (continua nel punto $y \in Y$ rispetto al sottospazio Y di X).

Sia $\{A_h\}_{h \in H}$ una famiglia di sottoinsiemi dello spazio topologico X che soddisfa alle ipotesi della proposizione 2.3 oppure alle ipotesi della proposizione 2.4, e sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione di X nello spazio topologico X'.

Proposizione 2.10. *L'applicazione $f\colon X \to X'$ è continua se, e soltanto se, f è continua rispetto ad ogni A_h, ossia se, e soltanto se, è continua la restrizione $f_{|A_h}\colon A_h \to X'$ di f ad A_h per ogni $h \in H$.*

Dimostrazione. Sia $i_h\colon A_h \to X$ l'applicazione identica di A_h in X e sia A' un aperto di X'. Risulta

$$f^{-1}_{|A_h}(A') = (f \circ i_h)^{-1}(A') = i_h^{-1}[f^{-1}(A')] = f^{-1}(A') \cap A_h.$$

Siccome $f_{|A_h}$ è continua, risulta $f^{-1}(A') \cap A_h$ aperto in A_h. Per la proposizione 2.3 oppure 2.4, a seconda delle ipotesi verificate dalla famiglia $\{A_h\}_{h \in H}$, $f^{-1}(A')$ è un aperto di X. Q.E.D.

Esempio

[2.10] Sia $I = [0, 1]$ con la topologia indotta dalla retta reale; un arco a dello spazio topologico X è un'applicazione continua $a\colon I \to X$. Siano a, b due archi di X tali che $a(1) = b(0)$; si chiama prodotto dei due archi a e b l'applicazione $a \cdot b\colon I \to X$ cosí definita:

$$a \cdot b(t) = \begin{cases} a(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] b(2t-1) & \text{se } \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

L'applicazione $a \cdot b$ è un arco di X; infatti sono continue le restrizioni di $a \cdot b$ ai due intervalli chiusi $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$, dopo di che l'asserto segue dalla proposizione 2.10.

3. *Prodotto di due spazi topologici*

Vogliamo definire una topologia nel prodotto cartesiano di una qualsiasi famiglia di insiemi, a partire da una famiglia di topologie assegnate su questi ultimi. Per maggior chiarezza cominceremo a considerare il caso in cui la famiglia consta di *due* spazi topologici. Successivamente esamineremo il caso di una famiglia qualsiasi.

Siano X e Y due spazi topologici, sia $X \times Y$ il prodotto cartesiano cioè l'insieme delle coppie (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$, e siano

$$p\colon X \times Y \to X, \qquad q\colon X \times Y \to Y$$

le proiezioni canoniche associate a tale prodotto, ossia definite da

$$p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Definizione 3.1. *Topologia prodotto* su $X \times Y$ è la topologia meno fine rispetto alla quale le proiezioni p e q sono continue. L'insieme $X \times Y$ con la topologia prodotto dicesi lo *spazio prodotto dei due spazi topologici* X e Y, od anche, il *prodotto topologico* di X e Y.

Teorema 3.2. *La topologia prodotto in* $X \times Y$ *ha per base la famiglia dei prodotti* $U \times V$ *dove* U *è aperto di* X *e* V *è aperto di* Y.

Dimostrazione. Siano τ_1 la topologia meno fine in $X \times Y$ tra quelle per cui $p\colon X \times Y \to X$ è continua, τ_2 la topologia meno fine di $X \times Y$ tra quelle per cui $q\colon X \times Y \to Y$ è continua.

Gli aperti di τ_1 sono i sottoinsiemi

$$p^{-1}(U) = U \times Y \text{ di } X \times Y \text{ con } U \text{ aperto in } X.$$

Gli aperti di τ_2 sono i sottoinsiemi

$$q^{-1}(V) = X \times V \text{ di } X \times Y \text{ con } V \text{ aperto in } Y.$$

La topologia prodotto τ è la topologia meno fine tra le topologie che sono piú fini sia di τ_1 sia di τ_2, e quindi, per quanto è stato già visto nell'esempio 3.5 del capitolo primo, una base $\mathfrak{B}$ di τ è la famiglia delle intersezioni di un aperto di τ_1 con un aperto di τ_2.

Dunque τ ha per base i sottoinsiemi

$$p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = (U \cap X) \times (Y \cap V) = \\ = U \times V.$$

Q.E.D.

Proposizione 3.3. *Se* $\mathfrak{B}$ *è una base su* X *e* $\mathfrak{C}$ *una base su* Y, *la famiglia*

$$\mathfrak{D} = \{B \times C \mid B \in \mathfrak{B},\ C \in \mathfrak{C}\}$$

è una base del prodotto topologico $X \times Y$.

Dimostrazione. Gli elementi di $\mathfrak{D}$ sono aperti della topologia prodotto. In base al teorema 3.2, per dimostrare che $\mathfrak{D}$ è una base nello spazio $X \times Y$ basta far vedere che il prodotto di un qualsiasi aperto U di X con un qualsiasi aperto V di Y è unione di elementi di $\mathfrak{D}$. Infatti, esiste una famiglia $\{B_i\}_{i\in I}$ di elementi di $\mathfrak{B}$ e una famiglia $\{C_j\}_{j\in J}$ di elementi di $\mathfrak{C}$ tali che

$$U = \bigcup_{i\in I} B_i, \qquad V = \bigcup_{j\in J} C_j.$$

Pertanto si ha

$$U \times V = (\bigcup_{i\in I} B_i) \times (\bigcup_{j\in J} C_j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} B_i \times C_j.$$

Q.E.D.

Proposizione 3.4. *Un sottoinsieme* P *dello spazio prodotto* $X \times Y$ *è un intorno di un punto* $(x, y) \in X \times Y$, *se, e soltanto se, esiste un intorno* M *di* x *in* X *ed un intorno* N *di* y *in* Y *tali che* $M \times N \subset P$.

Dimostrazione. Se P è un intorno di (x, y), per la proposizione 5.8 del capitolo primo esiste un aperto U di X ed un aperto V di Y per i quali si ha

$$(x, y) \in U \times V \subset P.$$

Siccome U e V sono aperti, contenenti rispettivamente x e y, essi sono intorni di x e di y.

Inversamente siano M e N due intorni di x e y tali che

$$M \times N \subset P.$$

Esistono un aperto U di X ed un aperto V di y tali che

$$x \in U \subset M, \qquad y \in V \subset N.$$

Ne segue

$$(x, y) \in U \times V \subset M \times N \subset P.$$

Q.E.D.

Corollario 3.5. *Se* $\mathfrak{M}(x)$ *e* $\mathfrak{N}(y)$ *sono sistemi fondamentali di intorni di un punto* $x \in X$ *e di un punto* $y \in Y$, *la famiglia dei prodotti di un elemento* $\mathfrak{M}(x)$ *per un elemento di* $\mathfrak{N}(y)$ *è un sistema fondamentale di intorni di* $(x, y) \in X \times Y$ *per la topologia prodotto di* $X \times Y$.

Segue dalla proposizione 3.4 che un punto (x, y) è aderente al prodotto $M \times N \subset X \times Y$ se, e soltanto se, x è aderente a M e y è aderente a N. In altre parole:

Proposizione 3.6. *Nello spazio prodotto* $X \times Y$, *la chiusura del prodotto* $M \times N \subset X \times Y$ *è il prodotto* $\overline{M} \times \overline{N}$ *della chiusura di* M *in* X *e di* N *in* Y.

Proposizione 3.7. *Se* B *è un sottoinsieme dello spazio topologico* X, *e* C *è un sottoinsieme dello spazio topologico* Y, *allora*

$$\overset{\circ}{\widehat{B \times C}} = \overset{\circ}{B} \times \overset{\circ}{C}.$$

Dimostrazione. Infatti $\mathring{B} \times \mathring{C}$ è un aperto, contenuto in $B \times C$; dunque

$\mathring{B} \times \mathring{C} \subset \widehat{B \times C}^{\circ}$. Viceversa, se $(x, y) \in (\widehat{B \times C}^{\circ})$, ossia è interno a $B \times C$, esiste un intorno U di x, ed uno V di y tali che

$$(x, y) \in U \times V \subset B \times C,$$

e quindi $x \in U \subset B$, $y \in V \subset C$. In altre parole x è interno a B, y è interno a C, ossia $(x, y) \in \mathring{B} \times \mathring{C}$. Q.E.D.

Siano $S \subset X$ e $T \subset Y$ due sottospazi di X ed Y rispettivamente.

Proposizione 3.8. *La topologia indotta da $X \times Y$ sul sottospazio $S \times T$ coincide con la topologia prodotto della topologia indotta da X su S e da Y su T.*

Dimostrazione. $A \subset S \times T$ è un aperto di $S \times T$ per la topologia indotta se esiste H aperto in $X \times Y$ tale che

$$A = (S \times T) \cap H.$$

Per la proposizione 3.2 è $H = \bigcup_i (U_i \times V_i)$ con U_i aperto in X e V_i aperto in Y; dunque

$$A = (S \times T) \cap [\bigcup_i (U_i \times V_i)] = \bigcup_i [(S \times T) \cap (U_i \times V_i)] = \\ = \bigcup_i [(S \cap U_i) \times (T \cap V_i)]$$

e ciò prova che A è aperto in $S \times T$ per la topologia prodotto della topologia indotta da X su S e quella indotta da Y su T.

Le stesse relazioni, lette in senso inverso, provano il viceversa. Q.E.D.

Proposizione 3.9. *Siano X ed Y due spazi topologici. Le proiezioni canoniche p: $X \times Y \to X$ e q: $X \times Y \to Y$ sono aperte (rispetto alla topologia prodotto), ossia trasformano aperti in aperti.*

Dimostrazione. Basta provare che se (x, y) è interno ad un sottoinsieme A di $X \times Y$, allora $x = p(x, y)$ è interno a $p(A)$.

Esiste, per la proposizione 3.4, un intorno U di x in X ed un intorno V di y in Y tali che $(x, y) \in U \times V \subset A$. Ne segue

$$x = p(x, y) \in p(U \times V) = U \subset p(A).$$

Analogamente per q. Q.E.D.

Esempi

[3.1] Se X ed Y sono due insiemi infiniti con le topologie che hanno per chiusi (oltre, rispettivamente, X ed Y) i sottoinsiemi finiti, la topologia prodotto di $X \times Y$ è strettamente piú fine della topologia che ha per chiusi (oltre $X \times Y$) i sottoinsiemi finiti.

[3.2] Se $\mathbf{R}$ è la retta reale, in $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ i rettangoli senza contorno con i lati paralleli agli assi delle coordinate sono una base della topologia prodotto.

[3.3] Sia (x_0, y_0) un punto dello spazio prodotto $X \times Y$ di due spazi topologici X, Y. I sottospazi $X \times \{y_0\}$ ed $\{x_0\} \times Y$ di $X \times Y$ sono rispettivamente omeomorfi ad X ed Y (gli omeomorfismi essendo la restrizione di p: $X \times Y \to X$ ad $X \times \{y_0\}$ e la restrizione di q: $X \times Y \to Y$ ad $\{x_0\} \times Y$).

[3.4] Sia X uno spazio topologico ed $X^2 = X \times X$ il prodotto topologico di X per X. L'applicazione

f: $X^2 \to X^2$ definita da $f(x, y) = (y, x)$ per ogni $(x, y) \in X^2$

è un omeomorfismo.

4. *Prodotti di spazi metrici*

Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, con funzioni distanza d_1 e d_2. Siano $x_1, y_1 \in X_1$; $x_2, y_2 \in X_2$; $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Lemma 4.1. *Le funzioni a valori reali definite su*

$$(X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2)$$

dalle formule

$$(1) \qquad \begin{cases} d(x, y) = \text{Sup. } [d_1(x_1, y_1),\ d_2(x_2, y_2)], \\ d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \\ d''(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}, \end{cases}$$

sono delle distanze su $X_1 \times X_2$. Per esse risulta

$$(2) \qquad d(x, y) \leqslant d''(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant 2d(x, y).$$

Dimostrazione. Si verifica subito che le funzioni d e d' soddisfano alle condizioni I-IV della definizione 4.1 del capitolo primo, e che la d'' soddisfa alle I, II e IV. Proviamo che per d'' vale la III.

Posto

$$z = (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2,$$

si ha

$$d''(x, z) = \sqrt{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{[d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)]^2}.$$

Ricordiamo che se $z = a + ib$, $z' = c + id$ sono due numeri complessi, intercede tra i moduli la relazione $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$, ossia per ogni quaterna a, b, c, d di numeri reali si ha

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Ne segue

$$d''(x, z) \leqslant \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} + \sqrt{d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2}$$

ossia

$$d''(x, z) \leqslant d''(x, y) + d''(y, z).$$

Inoltre $d''(x, y)$ è maggiore o eguale alla radice quadrata del piú grande degli addendi che compaiono sotto il segno di radice in (1). Pertanto risulta

$$d(x, y) \leqslant d''(x, y).$$

D'altra parte

$$d''(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2} \leqslant d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) = d'(x,y).$$

Infine

$$d'(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \leqslant 2\ \text{Sup.}(d_1(x_1,y_1),\ d_2(x_2,y_2)) =$$
$$= 2\, d(x, y).$$

Q.E.D.

Dal lemma precedente discende la

Proposizione 4.2. *Le distanze d, d', e d'' definiscono su $X_1 \times X_2$ la stessa topologia. Questa coincide con la topologia prodotto delle topologie indotte da d_1 su X_1 e da d_2 su X_2.*

Dimostrazione. Siano $S(x, \varepsilon)$, $S'(x, \varepsilon)$ e $S''(x, \varepsilon)$ i dischi di centro x e raggio ε per le distanze d, d' e d''.

Dalla (2) segue che

$$S(x, \varepsilon) \subset S'(x, 2\varepsilon) \subset S''(x, 2\varepsilon) \subset S(x, 2\varepsilon).$$

Una qualunque delle tre successioni di dischi

$$\left\{ S\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}, \quad \left\{ S'\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}, \quad \left\{ S''\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\} \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni per ciascuna delle topologie definite su $X_1 \times X_2$ dalle distanze d, d' e d''. Pertanto tali topologie coincidono. Resta da dimostrare che queste topologie coincidono con la topologia prodotto.

Se $S_1(x_1, \varepsilon) \subset X_1$ e $S_2(x_2, \varepsilon) \subset X_2$ denotano i dischi di centri x_1 e x_2 e raggio ε per le distanze d_1 e d_2 in X_1 ed in X_2, risulta

$$S_1(x_1, \varepsilon) \times S_2(x_2, \varepsilon) = S(x, \varepsilon):$$

Q.E.D.

Esempio

[4.1] Se $\mathbf{R}$ è la retta reale, con la distanza $d_1(x, y) = |x - y|$, in $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ i dischi delle distanze d, d', d'' del lemma 4.1 sono rispettivamente i quadrati (senza contorno) coi lati paralleli agli assi delle coordinate, i quadrati (senza contorno) con le diagonali parallele agli assi delle coordinate e gli interni dei cerchi.

5. *Topologia prodotto ed applicazioni continue*

Dalla proposizione 3.4 segue il

Teorema 5.1. *Sia f un'applicazione dello spazio prodotto $X \times Y$ in uno spazio topologico Z. f è continua nel punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ se, per ogni intorno W di $f(x_0, y_0)$, esistono un intorno U di x_0 in X ed un intorno V di y_0 in Y, tali che $f(U \times V) \subset W$.*

Corollario 5.2. *Se f è continua nel punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$, le applicazioni $f_{y_0}\colon x \to f(x, y_0)$ di X in Z e $f_{x_0}\colon y \to f(x_0, y)$ di Y in Z sono continue nel punto (x_0, y_0).*

Esempio

[5.1] Supponiamo che $f\colon X \times Y \to Z$ sia tale che, per ogni scelta del punto (x_0, y_0) in $X \times Y$, le applicazioni $f_{y_0}\colon X \to Z$ e $f_{x_0}\colon Y \to Z$

siano continue. Una f siffatta non è necessariamente un'applicazione continua di $X \times Y$ in Z.

Consideriamo in $\mathbf{R}^2$ la topologia τ cosí definita: τ è la famiglia dei sottoinsiemi A di $\mathbf{R}^2$ che hanno la proprietà seguente.

Consideriamo in $\mathbf{R}^2$ le famiglie di sottoinsiemi $(X_y)_{y \in \mathbf{R}}$, $(Y_x)_{x \in \mathbf{R}}$ dove $X_y = \mathbf{R} \times \{y\}$, $Y_x = \{x\} \times \mathbf{R}$, con la topologia indotta dalla topologia prodotto della topologia della retta reale per se stessa. In altre parole X_y è una parallela all'asse delle x ed Y_x è una parallela all'asse delle y, entrambe con la topologia della retta reale (v. esempio 3.3).

Un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^2$ appartiene a τ se, e soltanto se, le intersezioni $X_y \cap A$, ed $Y_x \cap A$ sono aperti della retta reale per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

È immediato verificare che la famiglia τ soddisfa agli assiomi degli aperti. Dimostriamo che τ, che ovviamente è piú fine della topologia euclidea, è strettamente piú fine di questa; dimostriamo cioè che esiste un aperto di τ che non è aperto nella topologia euclidea.

Sia F l'insieme dei punti della successione $\{(1/n, 1/n)\}_{n=1,2,\dots}$ ed $A = \complement F$. Ogni parallela all'asse delle x, oppure all'asse delle y è contenuta in A, oppure la sua intersezione con A è se stessa meno un punto. Dunque A è un aperto di τ, ma non è un aperto della topologia euclidea, perché l'origine è un punto di A che non è interno ad A.

Consideriamo l'applicazione identica i: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ di $\mathbf{R}^2$ con la topologia prodotto della retta reale per se stessa (e coincidente con la topologia euclidea, per la proposizione 4.2) in $\mathbf{R}^2$ con la topologia τ sopra descritta.

Per la proposizione 2.8 del capitolo primo l'applicazione i non è continua (del resto non è continua nell'origine). D'altra parte le applicazioni i_{y_0}: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ ed i_{x_0} : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ sono continue per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

Siano g: $Z \to X$, h: $Z \to Y$ due applicazioni di un insieme Z in due insiemi X ed Y, e sia k: $Z \to X \times Y$ l'applicazione definita da $k(z) = (g(z), h(z))$ per ogni $z \in Z$, ossia tale che

$$p \circ k = g \colon Z \to X, \qquad q \circ k = h \colon Z \to Y$$

dove p, q sono le proiezioni canoniche del prodotto $X \times Y$.

Denoteremo talvolta l'applicazione k con $g \times h$.

Teorema 5.3. *L'applicazione k è continua in un punto $z_0 \in Z$ se, e soltanto se, g e h sono continue nel punto z_0.*

Dimostrazione. Poiché p e q sono continue, se k è continua in z_0, g e h sono continue.

Inversamente siano g e h continue nel punto $z_0 \in Z$, e sia W un qualsiasi intorno di $k(z_0) = (g(z_0), h(z_0))$. Per la proposizione 3.4 esistono un intorno U di $g(z_0) \in X$ ed un intorno V di $h(z_0) \in Y$, tali che $U \times V \subset W$. D'altra parte, essendo h e g continue in z_0, esistono due intorni N_1 e N_2 di z_0 tali che

$$g(N_1) \subset U, \qquad h(N_2) \subset V.$$

Consideriamo l'intorno $N = N_1 \cap N_2$ di z_0. Risulta

$$k(N) = g(N) \times h(N) \subset U \times V \subset W,$$

sicché k è continua in z_0. Q.E.D.

Siano X e Y due insiemi ed h: $X \to Y$ un'applicazione di X in Y.

Definizione 5.4. Il sottoinsieme di $X \times Y$

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = h(x)\}$$

dicesi il *grafico* dell'applicazione h. Qualora $Y = X$, il grafico dell'applicazione identica i: $X \to X$, $\Gamma_i = \{(x, x) \in X \times X\}$ chiamasi la *diagonale* di $X \times X$.

Proposizione 5.5. *L'applicazione h: $X \to Y$ dello spazio topologico X nello spazio topologico Y è continua se, e soltanto se, l'applicazione*

$$k = i \times h \colon X \to X \times Y,$$

definita da $k(x) = (x, h(x))$ per ogni $x \in X$, è un omeomorfismo di X col sottospazio Γ_h di $X \times Y$.

Dimostrazione. Sia i': $\Gamma_h \to X \times Y$ l'applicazione identica (continua) del sottospazio Γ_h di $X \times Y$ in $X \times Y$, e k': $X \to \Gamma_h$ l'applicazione (v. paragrafo 2) tale che

$$k = i' \circ k' \colon X \to X \times Y.$$

Se k' è un omeomorfismo, k è continua e quindi $h = q \circ k$ è continua.

Supponiamo inversamente che h sia continua. Dal teorema 5.3 (ove si ponga $Z = X$, $g = i$: $X \to X$) segue che k è continua. Per la proposizione 2.8 l'applicazione k' è continua.

D'altra parte k' è bigettiva e risulta

$$k'^{-1}(x,\ h(x)) = x = p(x,\ h(x))$$

ossia

$$k'^{-1} = p_{|\Gamma_h}.$$

Quindi k'^{-1} è continua. Q.E.D.

6. *Prodotti di famiglie qualunque di spazi topologici*

Sia $(X_i,\ \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici, X un insieme ed $\mathfrak{F} = (f_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni f_i di X in X_i.

Per ogni $i \in I$ si può considerare su X la topologia τ_{f_i} meno fine tra le topologie per le quali l'applicazione f_i è continua. Per la proposizione 1.1 τ_{f_i} è la famiglia $f_i^{-1}(\tau_i)$ delle immagini inverse mediante f_i degli aperti di τ_i.

Sia $\mathfrak{B}$ la famiglia dei sottoinsiemi B di X del tipo

$$B = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}$$

dove $J = (i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n)$ è un qualunque sottoinsieme finito di I e A_{i_h} (per $h = 1,\ 2,\ \dots,\ n$) è un aperto di $\tau_{f_{i_h}}$. Dagli assiomi per gli aperti di una topologia segue che $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su X. Vale al riguardo il teorema seguente di cui la proposizione 1.1 è un caso particolare.

Teorema 6.1. *La famiglia $\mathfrak{B}$ è una base della topologia $\tau_{\mathfrak{F}}$ meno fine tra le topologie τ' di X per le quali è continua ogni applicazione f_i della famiglia $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. Ogni topologia τ' contiene la famiglia τ_{f_i} per ogni $i \in I$. D'altra parte $\mathfrak{B}$ è la famiglia delle intersezioni finite di elementi delle τ_{f_i} per ogni $i \in I$. Per la proposizione 3.5 del capitolo primo la topologia meno fine $\tau_{\mathfrak{F}}$ tra le topologie τ' è generata da $\mathfrak{B}$. Per quanto abbiamo osservato sopra, $\mathfrak{B}$ è base di una topologia su X, che pertanto coincide con la topologia $\tau_{\mathfrak{F}}$. Q.E.D.

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici, $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano degli insiemi X_i, $\mathfrak{P} = \{p_i\colon X \to X_i\}_{i\in I}$ la famiglia delle proiezioni canoniche dell'insieme X sugli spazi X_i.

Definizione 6.2. *Topologia prodotto* su X è la topologia $\tau_{\mathfrak{P}}$ meno fine tra le topologie per le quali le applicazioni p_i sono continue.

L'insieme X munito della topologia prodotto si chiama *lo spazio (topologico) prodotto od* anche il *prodotto topologico* della famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$.

Dal teorema 6.1 segue la:

Proposizione 6.3. *La topologia prodotto su X ha per base la famiglia τ di tutte le intersezioni finite degli insiemi $p_i^{-1}(A_i)$ al variare di i in I e di A_i nella famiglia degli aperti di X_i.*

Se $\{X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\}$ è una famiglia finita di spazi topologici, la base $\mathfrak{B}$ della topologia prodotto di $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, descritta nella proposizione 6.3, è la famiglia dei sottoinsiemi

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n,$$

dove A_h è un qualunque aperto di X_h per $h = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. In particolare, per $n = 2$, si ritrova la proposizione 3.2.

Esempio

[6.1] Sia $(X_i,\ \tau_i)$ una famiglia infinita di spazi topologici con la seguente proprietà: per ogni $i \in I$, escluso al piú un numero finito di essi, la topologia τ_i non è la topologia indiscreta.

La famiglia $\mathfrak{B}^*$ dei prodotti $B = \prod_{i\in I} A_i$, dove $A_i \in \tau_i$, è base di una topologia su $X = \prod_{i\in I} X_i$ strettamente piú fine della topologia prodotto τ.

Infatti $\mathfrak{B}^*$ ricopre X; se poi $B = \prod_{i\in I} A_i$, $B' = \prod_{i\in I} A'_i$ sono due elementi di $\mathfrak{B}^*$, risulta $B \cap B' = \prod_{i\in I} (A_i \cap A'_i) \in \mathfrak{B}^*$.

Sia $B = \prod_{i\in I} A_i$ con A_i aperto in X_i e diverso dal vuoto e da X_i, escluso al piú un numero finito di indici per i quali $A_i = X_i$. Non può esistere un numero finito di indici $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n$ con $U_{i_1} \in \tau_{i_1}$, $U_{i_2} \in \tau_{i_2}$, ..., $U_{i_n} \in \tau_{i_n}$ tali che

$$p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subset B \qquad \text{Q.E.D.}$$

In particolare la topologia prodotto di una famiglia infinita di spazi topologici aventi la topologia discreta, ed infiniti dei quali hanno almeno due punti, è strettamente meno fine della topologia discreta.

Molte delle proposizioni stabilite nei paragrafi 3, 4 e 5 per il prodotto di due spazi topologici si lasciano generalizzare senza difficoltà, con dimostrazioni analoghe, al prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici.

Enunciamo alcune di tali estensioni, lasciando al lettore il compito di svolgere le dimostrazioni, nella traccia delle analoghe dimostrazioni indicate nei paragrafi precedenti.

Proposizione 6.4. *Sia data, per ogni $i \in I$, una base $\mathfrak{B}_i$ su X_i. La topologia prodotto su $X = \prod_{i \in I} X_i$ ha per base l'insieme (delle intersezioni di tutte le famiglie finite) di sottoinsiemi di X della forma $\prod_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathfrak{B}_i$ per un numero finito di indici $i \in I$, e $B_i = X_i$ per tutti gli altri indici.*

Sia $\mathfrak{F} = \{f_i \colon Y \to X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di applicazioni dello spazio topologico Y negli spazi topologici X_i e sia $f \colon Y \to X = \prod_{i \in I} X_i$ l'applicazione di Y in X definita da

$$f(y) = \{f_i(y)\}_{i \in I} \quad \text{per ogni } y \in Y,$$

ossia tale che

$$p_i \circ f = f_i \colon \; Y \to X_i \quad \text{per ogni } i \in I.$$

Se X ha la topologia prodotto, si ha che:

Proposizione 6.5. *L'applicazione f è continua in un punto $y \in Y$, se e soltanto se, f_i è continua nel punto $y \in Y$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Se f è continua in y, $f_i = p_i \circ f$ è continua in y. Inversamente sia f_i continua in y per ogni $i \in I$. Sia A un qualsiasi aperto di X contenente $f(y)$. Per la proposizione 6.3 esiste un numero finito di indici, $i_1, \ldots, i_n$, ed un numero finito di aperti $A_{i_1} \subset X_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \subset X_{i_n}$, tali che

$$f(y) \in p_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap p_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) \subset A.$$

Poiché le applicazioni $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}$ sono continue in y, esiste un aperto $B \subset Y$, $y \in B$, tale che

$$f_{i_1}(B) \subset A_{i_1}, \;\ldots,\; f_{i_n}(B) \subset A_{i_n}.$$

Risulta

$$f(B) = \prod_{i \in I} f_i(B) \subset p_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \ldots \cap p_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) \subset A.$$

Pertanto f è continua in y. Q.E.D.

Esempio

[6.2] Sia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbf{R}^k$, e siano $q_h \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ ($h = 1, 2, \ldots, k$) le proiezioni canoniche di $\mathbf{R}^k$. Se $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ è un'applicazione di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^k$, le k applicazioni $f_h = q_h \circ f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si rappresentano scrivendo

$$y_h = f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{per } h = 1, 2, \ldots, k$$

e sono k funzioni a valori reali su $\mathbf{R}^n$, o, come anche si dice, sono funzioni reali delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'applicazione f è continua in $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (rispetto alle topologie euclidee di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{R}^k$) se, e soltanto se, sono continue in x^0 le k funzioni f_h, ossia se, e soltanto se, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $| x_r - x_r^0 | < \delta$ (per ogni $r = 1, 2, \ldots, n$) si ha $| f_h(x) - f_h(x^0) | < \varepsilon$ (per ogni $h = 1, 2, \ldots, k$).

Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici e sia $(I_a)_{a \in A}$ una partizione di I in sottoinsiemi I_a non vuoti e a due a due disgiunti.

Poniamo:

$$X = \prod_{i \in I} X_i \quad p_i \colon \; X \to X_i \text{ proiezioni canoniche di } X,$$

$$X'_a = \prod_{i \in I_a} X_i \quad p_{a,i} \colon \; X'_a \to X_i \text{ proiezioni canoniche di } X'_a,$$

$$X' = \prod_{a \in A} X'_a \quad p_a \colon \; X' \to X'_a \text{ proiezioni canoniche di } X',$$

e consideriamo in X, X'_a, X' le topologie prodotto corrispondenti.

Per ogni $i \in I$ sia $a(i)$ l'elemento di A tale che $i \in I_a$, e consideriamo la famiglia di applicazioni continue (rispetto alle topologie introdotte)

$$f_i = p_{a(i),i} \circ p_{a(i)} \colon \; X' \to X_i.$$

Sia $f \colon X' \to X$ l'applicazione indotta dalle applicazioni f_i, ossia tale che $p_i \circ f = f_i \colon X' \to X_i$ per ogni $i \in I$. Per la proposizione 6.5, l'applicazione f è continua.

D'altra parte per ogni $a \in A$ la famiglia di applicazioni $\{p_i\colon X \to X_i\}_{i \in I_a}$ definisce l'applicazione

$$g_a\colon X \to X'_a \text{ tale che } p_{a,i} \circ g_a = p_i\colon X \to X'_a,$$

anch'essa continua, per la proposizione 6.5.

A sua volta, la famiglia di applicazioni $\{g_a\colon X \to X'_a\}_{a \in A}$ definisce un'applicazione

$$g\colon X \to X' \text{ tale che } p_a \circ g = g_a\colon X \to X'_a \text{ per ogni } a \in A,$$

essa pure continua, per la proposizione 6.5.

Abbiamo costruito due applicazioni continue

$$f\colon X' \to X \qquad g\colon X \to X'.$$

Dimostriamo ora che

Proposizione 6.6. *Le applicazioni f e g sono omeomorfismi, l'uno inverso dell'altro.* (Proprietà associativa del prodotto topologico.)

Dimostrazione. Per la proposizione 2.7 del capitolo primo basta dimostrare che $f \circ g =$ identità su X e $g \circ f =$ identità su X'.

Sia $x = \{x_i\}_{i \in I} \in X$; risulta

$$\begin{aligned} p_i \circ f \circ g(x) &= f_i \circ g(x) = p_{a(i),i} \circ p_{a(i)} \circ g(x) = p_{a(i),i} \circ g_{a(i)}(x) = \\ &= p_i(x) = x_i \text{ per ogni } i \in I, \end{aligned}$$

e ciò prova che $f \circ g(x) = x$ per ogni $x \in X$.

Sia $x' = \{x'_a\}_{a \in A}$ dove $x_a' = \{x_i\}_{i \in I_a}$; dobbiamo dimostrare che $p_a \circ g \circ f(x') = x'_a$ per ogni $a \in A$, ossia che

$$p_{a,i} \circ p_a \circ g \circ f(x') = x_i \text{ per ogni } i \in I_a.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} p_{a,i} \circ p_a \circ g \circ f(x') &= p_{a,i} \circ g_a \circ f(x') = p_i \circ f(x') = f_i(x') = \\ &= p_{a(i),i} \circ p_{a(i)}(x') = p_{a(i),i}(x'_{a(i)}) = x_i, \end{aligned}$$

e ciò prova che $g \circ f(x') = x'$ per ogni $x' \in X'$. Q.E.D.

7. *Prodotto di una famiglia numerabile di spazi metrici*

Sia $(X_n, d_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ una famiglia numerabile di spazi metrici, e sia $X = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} X_n$ il prodotto cartesiano degli insiemi X_n. Dimostreremo che anche in questo caso possiamo definire su X una distanza d che induca, come nel paragrafo 4, la topologia prodotto su X.

Possiamo supporre (v. esempio 4.6 del paragrafo 1) che per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ ed ogni $x_n, y_n \in X_n$ sia $d_n(x_n, y_n) \leqslant 1$.

Premettiamo le osservazioni seguenti:

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{2^r} < 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}^*.$$

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ una successione di numeri reali tali che $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Risulta

$$\sum_1^n{}_r \frac{a_r}{2^r} \leqslant \sum_1^n{}_r \frac{1}{2^r} < 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}^*$$

e quindi esiste

$$(1) \qquad \sum_1^\infty{}_r \frac{a_r}{2^r} = \operatorname{Sup.}_{n \in \mathbf{N}^*} \left[\sum_1^n{}_r \frac{a_r}{2^r}\right] \leqslant 1.$$

Se $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ sono tre successioni di numeri reali compresi tra 0 e 1, tali che

$$c_n \leqslant a_n + b_n \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}^*,$$

risulta

$$(2) \qquad \sum_1^\infty{}_r \frac{c_r}{2^r} \leqslant \sum_1^\infty{}_r \frac{a_r}{2^r} + \sum_1^\infty{}_r \frac{b_r}{2^r}.$$

Infatti per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha:

$$\sum_1^n{}_r \frac{c_r}{2^r} \leqslant \sum_1^n{}_r \frac{a_r}{2^r} + \sum_1^n{}_r \frac{b_r}{2^r};$$

ne segue

$$\sum_1^n{}_r \frac{c_r}{2^r} \leqslant \sum_1^\infty{}_r \frac{a_r}{2^r} + \sum_1^\infty{}_r \frac{b_r}{2^r},$$

e quindi la (2).

In modo analogo si prova che

$$(1)' \qquad \sum_{p+1}^\infty{}_r \frac{a_r}{2^r} \leqslant \sum_{p+1}^\infty{}_r \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^p} \sum_1^\infty{}_r \frac{1}{2^r} \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

Ciò posto, siano $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ due punti di X. Poniamo

$$d(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r \frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r}. \tag{3}$$

Manifestamente $d(x, y)$ ha le proprietà I, II, IV del paragrafo 4, capitolo primo. La relazione triangolare III è conseguenza immediata della (2).

Proposizione 7.1. *La distanza d induce nel prodotto cartesiano* $X = \prod_{n\in\mathbf{N}^*} X_n$ *la topologia prodotto.*

Dimostrazione. Sia $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ un punto di X. Dati k numeri naturali $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ ed un numero reale $\varepsilon > 0$, il sottoinsieme U dei punti $y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ di X tali che

$$d_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) < \varepsilon \quad \text{per } i = 1, \ldots, k \tag{4}$$

è un intorno di x per la topologia prodotto. Il sistema $\mathfrak{U}(x)$ degli intorni U di x siffatti, al variare di $n_1 < \ldots < n_k$ e di ε, è un sistema fondamentale di intorni di x per la topologia prodotto.

Dimostriamo che dato l'intorno U di $\mathfrak{U}(x)$ associato ad $n_1 < \ldots < n_k$ e ad ε, il disco $S(x, \varrho)$ di centro x e raggio $\varrho = \varepsilon/2^{n_k}$ è contenuto in U. Sia infatti

$$d(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r \frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r} < \frac{\varepsilon}{2^{n_k}}.$$

Ne segue

$$\frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r} < \frac{\varepsilon}{2^{n_k}}$$

e quindi le (4).

Dimostriamo inversamente che, dato un disco $S(x, \varrho)$, esiste un intorno U di $\mathfrak{U}(x)$ contenuto in $S(x, \varrho)$.

Sia p un intero positivo tale che $\dfrac{1}{2^p} < \dfrac{\varrho}{2}$, e sia U l'intorno di $\mathfrak{U}(x)$ associato ai numeri naturali $1, \ldots, p$ e ad $\varepsilon = \dfrac{\varrho}{2p}$. Pertanto se $y \in U$ si ha:

$$d_r(x_r, y_r) < \frac{\varrho}{2p} \quad \text{per } r = 1, 2, \ldots, p.$$

Ne segue

$$d(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r \frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r} = \sum_{1}^{p} {}_r \frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r} + \sum_{p+1}^{\infty} {}_r \frac{d_r(x_r, y_r)}{2^r} \leqslant$$

$$\leqslant p \cdot \frac{\varrho}{2p} + \sum_{p+1}^{\infty} {}_r \frac{1}{2^r} < \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2} = \varrho,$$

ossia $y \in S(x, \varrho)$. Q.E.D.

Esempi

[7.1] Sia $I = [0, 1]$ con la topologia indotta dalla retta reale $\mathbf{R}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia I_n una copia di I. Il prodotto cartesiano

$$I^{\mathbf{N}^*} = \prod_{n\in\mathbf{N}^*} I_n$$

è l'insieme delle successioni di numeri reali compresi tra 0 e 1.

Siano $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ due elementi di $I^{\mathbf{N}^*}$;

$$d(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r \frac{1}{2^r} \cdot | y_r - x_r |$$

è una distanza in $I^{\mathbf{N}^*}$ che induce su $I^{\mathbf{N}^*}$ la topologia prodotto.

[7.2] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale, e per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ sia $\mathbf{R}_n$ una copia di $\mathbf{R}$. Il prodotto cartesiano

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*} = \prod_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{R}_n$$

è l'insieme delle successioni di numeri reali. Siano $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ due elementi di $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$;

$$d(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r \frac{1}{2^r} \frac{| y_r - x_r |}{1 + | y_r - x_r |}$$

è una distanza in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ che induce su $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ la topologia prodotto.

[7.3] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale e per ogni $t \in \mathbf{R}$ sia $\mathbf{R}_t$ una copia di $\mathbf{R}$. Il prodotto cartesiano (v. esempio 5.8 del capitolo primo)

$$\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = \prod_{t\in\mathbf{R}} \mathbf{R}_t$$

è l'insieme delle funzioni su $\mathbf{R}$ a valori reali. La topologia prodotto su

$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ coincide con la topologia descritta nell'esempio citato 5.8 del capitolo primo, ma lo spazio topologico $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ non è metrizzabile.

Infatti (v. esempio 5.1 del capitolo primo) ogni punto x di uno spazio metrico (X, d) possiede un sistema fondamentale di intorni che è numerabile, mentre ciò non è vero per la topologia prodotto di $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Sia infatti per assurdo $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di $x^0 = (x_t)_{t\in\mathbf{R}}$ dove $x_t = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $I_n \subset \mathbf{R}$, I_n finito, e per ogni $t \in I_n$ esiste un intorno U_t di 0, tali che

$$x^0 \in \bigcap_{t\in I_n} p_t^{-1}(U_t) \subset A_n.$$

Il sottoinsieme $J = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$ di $\mathbf{R}$ è numerabile. Esiste quindi un numero reale $s \notin J$. Sia $y^0 = (y_t)_{t\in\mathbf{R}}$ dove $y_s = 1$, $y_t = 0$ per $t \neq s$. Risulta $y^0 \in A_n$ per ogni numero naturale n. Ciò è assurdo, perché, posto $U_s =]-1/2, 1/2[$, $U = p_s^{-1}(U_s)$ è un intorno di x^0 che non contiene y^0.

Analogamente il prodotto topologico $\Pi = \prod_{t\in I} I_t$, dove I_t è una copia di $I = [0, 1]$, non è metrizzabile.

8. *Spazi quozienti*

Sia π: $X \to X'$ un'applicazione di uno spazio topologico in un insieme X'. Una qualsiasi topologia su X' rispetto alla quale π sia continua è tale che l'immagine inversa di ogni aperto di X' è un aperto di X.

Sia τ la famiglia di sottoinsiemi di X' tali che

(1) $$A' \in \tau \Leftrightarrow \pi^{-1}(A') \text{ è aperto in } X.$$

Si verifica facilmente che la famiglia τ soddisfa alle condizioni a), b) e c) della definizione 1.1 del capitolo primo. Essa è dunque la famiglia degli aperti di una topologia su X', la quale è la topologia *piú fine* rispetto alla quale π è continua.

Se π non è surgettiva, ogni punto di $\complement\pi(X)$ è aperto. Quindi la topologia indotta dalla τ su $\complement\pi(X)$ è la topologia discreta.

Supponiamo che X' sia dotato della topologia piú fine rispetto alla quale π: $X \to X'$ è continua, e sia f: $X' \to X''$ un'applicazione dello spazio topologico X' in uno spazio topologico X''.

Proposizione 8.1. *L'applicazione f è continua se, e soltanto se, $f \circ \pi$: $X \to X''$ è continua.*

Dimostrazione. Se f è continua, $f \circ \pi$ è continua, perché prodotto di due applicazioni continue.

Viceversa, se $f \circ \pi$ è continua, e se A è un qualsiasi aperto di X'',

$$(f \circ \pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(f^{-1}(A))$$

è aperto in X. Siccome X' ha la topologia piú fine perché π sia continua, dalla (1) segue che $f^{-1}(A)$ è aperto in Y'. Dunque f è continua. Q.E.D.

Sia data sullo spazio topologico X una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ e sia $Y = X/\mathfrak{R}$ l'insieme quoziente di X modulo $\mathfrak{R}$. Sia π: $X \to Y$ la proiezione naturale di X sul quoziente Y; π associa ad ogni $x \in X$ la classe di equivalenza $\pi(x)$ di x.

Definizione 8.2. *Spazio quoziente di X* modulo $\mathfrak{R}$ è l'insieme $Y = X/\mathfrak{R}$ munito della topologia piú fine rispetto alla quale la proiezione π: $X \to Y$ è continua. Chiameremo tale topologia la *topologia quoziente* della topologia di X modulo la relazione $\mathfrak{R}$.

In altre parole, si considerino quegli aperti U di X tali che

$$\{x \in U,\ x\,\mathfrak{R}\,y\} \Rightarrow y \in U.$$

ossia tali che $U = \pi^{-1}(\pi(U))$.

Gli aperti dello spazio quoziente $X/\mathfrak{R}$ sono esattamente i sottoinsiemi $\pi(U)$.

Dalla proposizione 8.1 segue la:

Proposizione 8.3. *Un'applicazione f dello spazio quoziente $X/\mathfrak{R}$ in uno spazio topologico Z è continua se, e soltanto se, l'applicazione*

$$f \circ \pi\colon X \to Z$$

è continua.

Sia X un insieme con una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$, X' un altro insieme con una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}'$, e sia f: $X \to X'$ un'applicazione di X in X' tale che

(2) $$x\,\mathfrak{R}\,y \Rightarrow f(x)\,\mathfrak{R}'\,f(y).$$

Esiste una ed una sola applicazione g: $X/\mathfrak{R} \to X'/\mathfrak{R}'$ tale che, se π: $X \to X/\mathfrak{R}$ e π': $X' \to X'/\mathfrak{R}'$ sono le proiezioni canoniche, risulti

$$g \circ \pi = \pi' \circ f\colon X \to X'/\mathfrak{R}'. \tag{3}$$

Infatti, per la (2), l'immagine mediante f della classe di $\mathfrak{R}$–equivalenza $\pi(x)$ di un punto $x \in X$ è contenuta nella classe di $\mathfrak{R}'$-equivalenza, $\pi'(f(x))$, di $f(x)$.

Possiamo quindi definire g: $X/\mathfrak{R} \to X'/\mathfrak{R}'$ ponendo per ogni $z = \pi(x) \in X/\mathfrak{R}$:

$$g(z) = g(\pi(x)) = \pi'(f(x)). \tag{4}$$

L'applicazione g di $X/\mathfrak{R}$ in $X'/\mathfrak{R}'$ cosí definita soddisfa la (3).

Viceversa ogni applicazione g soddisfacente alla (3) è tale che $g(\pi(x)) = \pi'(f(x))$ e quindi coincide con l'applicazione definita dalla (4).

Corollario 8.4. *Sia f: $X \to X'$ un'applicazione continua dello spazio topologico X nello spazio topologico X'. L'applicazione g: $X/\mathfrak{R} \to X'/\mathfrak{R}'$ determinata dalla f in base alla* (3), *è un'applicazione continua dello spazio quoziente $X/\mathfrak{R}$ nello spazio quoziente $X'/\mathfrak{R}'$.*

Dimostrazione. L'applicazione $g \circ \pi = \pi' \circ f$: $X \to X'/\mathfrak{R}'$ è continua. Quindi, per la proposizione 8.3, g è continua. Q.E.D.

Esempi

[8.1] Sia X uno spazio topologico, $\mathfrak{R}$ una relazione di equivalenza in X, π: $X \to X/\mathfrak{R}$ la proiezione naturale.

Sia Y un sottospazio di X tale che $\pi(Y) = X/\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}$ la restrizione ad Y della relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$. Se i: $Y \to X$ è l'applicazione identica di Y in X e π_1: $Y \to Y/\mathfrak{S}$ è la proiezione naturale, l'applicazione g: $Y/\mathfrak{S} \to X/\mathfrak{R}$, tale che $g \circ \pi_1 = \pi \circ i$, è bigettiva e continua (rispetto alle topologie quozienti).

Dalla proposizione 2.6 del capitolo primo e dalla definizione di topologia quoziente segue che l'applicazione g è un omeomorfismo se, e soltanto se, per ogni aperto (o chiuso) A di Y, tale che $A = \pi_1^{-1}[\pi_1(A)]$ risulta aperto (o chiuso) in X $\pi^{-1}[\pi(A)]$.

[8.2] Consideriamo sulla retta reale $\mathbf{R}$ la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$

$$x\,\mathfrak{R}\,y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$$

che si usa anche indicare scrivendo:

$$x \equiv y \mod 1.$$

La classe di equivalenza di un punto $x \in \mathbf{R}$ è l'insieme $\{x + n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Sia $Y = \mathbf{R}/\mathfrak{R}$ l'insieme quoziente e π: $\mathbf{R} \to Y$ la proiezione naturale.

$I = [0, 1]$ è tale che $\pi(I) = Y$; la restrizione della relazione di equivalenza $\mathbf{R}$ ad I è la relazione di equivalenza $x\,\mathfrak{S}\,y$ definita da:

$$y = x \quad \text{se } x \notin \{0, 1\}; \qquad y \in \{0, 1\} \quad \text{se } x \in \{0, 1\}.$$

In altre parole $I/\mathfrak{S}$ è l'insieme che si ottiene dal segmento I identificando gli estremi.

L'applicazione bigettiva g: $I/\mathfrak{S} \to \mathbf{R}/\mathfrak{R}$ considerata nell'esempio 8.1 in questo caso è un omeomorfismo. Sia infatti F un chiuso di I tale che $\pi_1^{-1}(\pi_1(F)) = F$ (F non interseca oppure contiene $\{0, 1\}$). Ne segue che

$$\pi^{-1}(\pi(F)) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \{F + n\}$$

è un chiuso di $\mathbf{R}$ perché unione di una famiglia localmente finita di chiusi.

Un caso particolare della situazione descritta nel corollario 8.4 è il seguente: sia f: $X \to X'$ un'applicazione dello spazio topologico X nello spazio topologico X' e sia $\mathfrak{R}_f$ (v. Introduzione, par. 5) la relazione di equivalenza in X indotta da f, ossia definita da

$$x\,\mathfrak{R}_f\,y \Leftrightarrow f(x) = f(y). \tag{4}$$

Qui la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}'$ di X' che compare nella (3) è l'uguaglianza, e quindi $X'/\mathfrak{R}' = X'$. Sia π: $X \to X/\mathfrak{R}_f$ la proiezione naturale e g: $X/\mathfrak{R}_f \to X'$ l'applicazione tale che $g \circ \pi = f$. Sappiamo dall'introduzione che g è iniettiva e dal corollario 8.4, che g è continua.

In particolare, se f è surgettiva, l'applicazione g: $X/\mathfrak{R}_f \to X'$ è bigettiva e continua. Il teorema seguente assicura sotto quali condizioni g è un omeomorfismo.

Teorema 8.5. *Sia f: $X \to X'$ un'applicazione surgettiva e continua. L'applicazione bigettiva g: $X/\mathfrak{R}_f \to X'$ è un omeomorfismo se, e soltanto se, X' ha la topologia piú fine rispetto alla quale f è continua, ossia se, e soltanto se,*

$$A' \text{ aperto in } X' \Leftrightarrow f^{-1}(A') \text{ aperto in } X. \tag{5}$$

Dimostrazione. Per la proposizione 2.6 del capitolo primo g è un omeomorfismo se, per ogni aperto B di $X/\mathfrak{R}_f$, $g(B)$ è un aperto di X'.

Sappiamo che B è un aperto di $X/\mathfrak{R}_f$ se, e soltanto se, $\pi^{-1}(B)$ è un aperto di X. D'altra parte, siccome π è surgettiva, $B = \pi(\pi^{-1}(B))$ e quindi

$$g(B) = g \circ \pi(\pi^{-1}(B)) = f(\pi^{-1}(B)).$$

Ciò prova che, se è vera la (5), allora $g(B)$ è aperto per ogni aperto B di $X/\mathfrak{R}_f$, ossia che g è un omeomorfismo.

Supponiamo inversamente che g sia un omeomorfismo. Siccome f è continua, da A' aperto in X' segue che $f^{-1}(A')$ è aperto in X. Supponiamo $f^{-1}(A')$ aperto in X. Ne segue che

$$f^{-1}(A') = \pi^{-1}(g^{-1}(A'))$$

è aperto in X e quindi $g^{-1}(A')$ è un aperto di $X/\mathfrak{R}_f$. Siccome g è un omeomorfismo, ciò è possibile se, e soltanto se, A' è un aperto di X'. Q.E.D.

Quando l'applicazione continua e surgettiva $f\colon X \to X'$ soddisfa alla (5) (e quindi X' è omeomorfo ad $X/\mathfrak{R}_f$), si usa anche dire che X' ha la topologia quoziente di X modulo f.

Esempio

[8.3] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale ed $\mathfrak{R}$ la relazione di equivalenza dell'esempio 8.2. Un'applicazione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice una funzione periodica di periodo 1 se

$$x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow f(x) = f(y) \text{ ossia se } x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow x \,\mathfrak{R}_f\, y.$$

Le funzioni continue e periodiche di periodo 1 sono tutte e sole le applicazioni $f = g \circ \pi$ dove π è la proiezione naturale di $\mathbf{R}$ sul quoziente Y di $\mathbf{R}$ modulo $\mathfrak{R}$ e g è una qualunque applicazione continua di Y in $\mathbf{R}$.

Corollario 8.6. *Se Y è uno spazio quoziente dello spazio topologico X, e Z uno spazio quoziente di Y, Z è omeomorfo ad uno spazio quoziente di X.*

Dimostrazione. Siano π_1 e π_2 le proiezioni naturali

$$\pi_1\colon X \to Y, \qquad \pi_2\colon Y \to Z.$$

Poiché π_1 e π_2 sono surgettive e continue, $\pi_2 \circ \pi_1\colon X \to Z$ è surgettiva e continua. La topologia di Z è la topologia piú fine rispetto alla quale $\pi_2 \circ \pi_1$ è continua. Dal teorema 8.5 segue che Z è omeomorfo ad uno spazio quoziente di X. Q.E.D.

Corollario 8.7. *Siano $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ due relazioni di equivalenza nello spazio topologico X, tali che, per ogni coppia di elementi x, y di X,*

$$x \,\mathfrak{R}_1\, y \Rightarrow x \,\mathfrak{R}_2\, y.$$

Lo spazio quoziente $X/\mathfrak{R}_2$ è omeomorfo ad uno spazio quoziente di $X/\mathfrak{R}_1$.

Dimostrazione. Ogni classe di $\mathfrak{R}_1$-equivalenza è contenuta in una classe di $\mathfrak{R}_2$-equivalenza. Risulta cosí definita l'applicazione surgettiva

$$g\colon X/\mathfrak{R}_1 \to X/\mathfrak{R}_2$$

che associa ad ogni classe di $\mathfrak{R}_1$-equivalenza, la classe di $\mathfrak{R}_2$-equivalenza che la contiene. Se

$$\pi_1\colon X \to X/\mathfrak{R}_1, \qquad \pi_2\colon X \to X/\mathfrak{R}_2,$$

sono le proiezioni naturali dello spazio X sugli spazi quozienti $X/\mathfrak{R}_1$ e $X/\mathfrak{R}_2$, risulta $g \circ \pi_1 = \pi_2$.

Poiché π_2 è continua, g è continua in virtú della proposizione 8.3. Siccome g è surgettiva, applicando il teorema 8.5 a g, si vede che $X/\mathfrak{R}_2$ è omeomorfo ad un quoziente di $X/\mathfrak{R}_1$. Q.E.D.

Esercizi

1. $\mathbf{R}_1$ ed $\mathbf{R}_2$ sono due copie dell'insieme dei numeri reali, $f\colon \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$ è l'applicazione definita da $f(x) = x^3$, per ogni $x \in \mathbf{R}_1$, $g\colon \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$ è l'applicazione definita da $g(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}_1$. La topologia di $\mathbf{R}_1$ immagine inversa mediante f della topologia euclidea di $\mathbf{R}_2$ è la topologia euclidea, e quella mediante g è la topologia che ha per aperti gli aperti della topologia euclidea che sono simmetrici rispetto allo zero.

2. Un sottospazio Y dello spazio topologico X ha la topologia discreta se, e soltanto se, Y non possiede punti di accumulazione.

3. Sia $A \subset Z \subset Y \subset X$. Se X è uno spazio topologico, ed A è

chiuso (aperto o localmente chiuso) in Y, allora A è chiuso (aperto o localmente chiuso) in Z.

4. Siano A, B, C tre sottoinsiemi di uno spazio topologico X, tali che $A \subset B \subset C$. Se A è denso in B e B è denso in C, allora A è denso in C.

5. Sia f: $X \to Y$ un omeomorfismo e A un sottoinsieme di X; l'applicazione g: $A \to f(A)$ indotta da f è un omeomorfismo rispetto alle topologie indotte.

6. In uno spazio topologico l'unione di una famiglia localmente finita di sottoinsiemi localmente chiusi è un sottoinsieme localmente chiuso.

7. A e B sono sottoinsiemi di uno spazio topologico X tali che $B \subset A$. Dimostrare che l'interno $\mathring{B}$ di B in X è contenuto nell'interno $\mathring{B}^r$ di B in A e che la frontiera $F(B)$ di B in A è contenuta in $A \cap F(B)$.

8. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X; dato un sottoinsieme B di X, sia $\bar{B}$ la chiusura di B in X, e $\overline{B \cap Y}^r$ la chiusura di $B \cap Y$ in Y; dimostrare che $\bar{B} \cap Y \supset \overline{B \cap Y}^r$.

9. Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X, B un sottoinsieme dello spazio topologico Y. Dimostrare che:

a) A è chiuso (aperto) in X e B è chiuso (aperto) in Y se, e soltanto se, $A \times B$ è chiuso (aperto) in $X \times Y$;

b) A è denso in X e B è denso in Y se, e soltanto se, $A \times B$ è denso in $X \times Y$;

c) tra le frontiere $F(A)$, $F(B)$, $F(A \times B)$ intercede la relazione

$$F(A \times B) = [F(A) \times \bar{B}] \cup [\bar{A} \times F(B)].$$

10. Sia C il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$ e K il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^3$. Dimostrare che K è omeomorfo al prodotto topologico $C \times \mathbf{R}$.

11. Sia $\mathbf{R}_1$ l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $[a, b[$ ed $\mathbf{R}_2$ lo stesso insieme con la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]a, b]$. Dimostrare che la topologia prodotto di $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$ induce sulla diagonale Δ la topologia discreta.

12. Nell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione definiscono tre applicazioni dell'$\mathbf{R}^2$ euclideo sulla retta reale, che sono continue. Cosa accade se $\mathbf{R}$ ha la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $[a, b[$ ed $\mathbf{R}^2$ ha la topologia prodotto di questa topologia per se stessa?

13. Sia (X, d) uno spazio metrico; la distanza d: $X \times X \to \mathbf{R}$ è un'applicazione continua (rispetto alla topologia prodotto della topologia indotta da d e rispetto alla topologia della retta reale).

14. Sia C il cerchio del n. 10 ed f: $\mathbf{R} \to C$ l'applicazione definita da $f(x) = (\cos 2\pi x,\ \mathrm{sen}\ 2\pi x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Dimostrare che:

a) f è continua, surgettiva e aperta (trasforma aperti in aperti);

b) f è un omeomorfismo locale (per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un intorno U di x tale che $f(U)$ è un aperto di C ed f definisce un omeomorfismo di U con $f(U)$);

c) sia $\mathfrak{R}_f$ la relazione di equivalenza indotta da f su $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}/\mathfrak{R}_f$ è lo spazio quoziente dell'esempio 8.2; questo spazio, il cerchio C e lo spazio quoziente ottenuto da un segmento identificando gli estremi sono spazi omeomorfi.

15. Sia g la restrizione dell'applicazione f del n. 14 all'intervallo $[0, 1[$. Dimostrare che g è bigettiva e continua, ma non è un omeomorfismo.

16. È una relazione di equivalenza sulla retta reale la relazione $x - y \in \mathbf{Q}$, dove $\mathbf{Q}$ è l'insieme dei razionali. Lo spazio quoziente corrispondente ha la topologia indiscreta.

17. Sia C il cerchio del piano euclideo, ed $\mathfrak{R}$ la relazione di equivalenza su C che ha per classi di equivalenza le coppie dei punti di C diametralmente opposte. Dimostrare che $C/\mathfrak{R}$ è omeomorfo a C.

18. Sulla retta reale $\mathbf{R}$ si consideri la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ indotta dalla funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = |x|$. Dimostrare che lo spazio quoziente $\mathbf{R}/\mathfrak{R}$ è omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, +\infty[$ della retta reale.

19. Consideriamo nell'$\mathbf{R}^2$ euclideo la relazione di equivalenza

$$(x, y)\ \mathfrak{R}\ (x', y') \quad \text{significa} \quad x - x' \in \mathbf{Z},\ y = y'.$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $\mathbf{R}^2/\mathfrak{R}$ è omeomorfo al prodotto $C \times \mathbf{R}$ del cerchio per la retta reale.

20. Sia α il piano della geometria elementare con la topologia indotta dalla distanza, ed r una retta del piano. Si consideri in α la relazione di equivalenza

$$P\ \mathfrak{R}\ Q \ \text{significa} \ \begin{cases} P = Q \\ \text{oppure} \\ P \text{ e } Q \text{ sono simmetrici rispetto ad } r. \end{cases}$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $\alpha/\mathfrak{R}$ è omeomorfo ad un semipiano chiuso di α.

21. Nell'$\mathbf{R}^3$ euclideo delle terne (x, y, z) di numeri reali, sia $\mathbf{R}^2$ il piano $z = 0$, $P = (0, 0, 1)$, $I = [0, 1]$, A un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Sia ora:

a) CA il cono di base A e vertice P, ossia il sottospazio di $\mathbf{R}^3$

$$x = x_0(1-t), \quad y = y_0(1-t), \quad z = t; \quad (x_0, y_0) \in A, \quad t \in I;$$

b) KA il cilindro di base A e altezza 1, ossia il sottospazio di $\mathbf{R}^3$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = t; \quad (x_0, y_0) \in A, \quad t \in I;$$

c) $\tilde{C}A$ lo spazio quoziente di KA ottenuto da KA identificando ad un punto la base superiore A_1: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$; $(x_0, y_0) \in A$.

Dimostrare che:

1) il cilindro KA è omeomorfo al prodotto topologico $A \times I$;

2) in modo " naturale " è definita un'applicazione del cilindro KA sul cono CA, che, per passaggio al quoziente, induce un'applicazione g di $\tilde{C}A$ su CA bigettiva e continua;

3) se A è l'insieme dei punti $P_n = (n, 0)$ di $\mathbf{R}^2$, dove $n \in \mathbf{N}$, allora g non è un omeomorfismo.

22. Sia α il piano euclideo, 0 un punto di α. Si considerino in $\alpha - 0$ le due relazioni di equivalenza

$$P\, \mathfrak{R}_1\, Q \quad \text{significa } Q \in \text{retta } OP$$
$$P\, \mathfrak{R}_2\, Q \quad \text{significa } Q \in \text{semiretta } OP$$

e sia $\mathfrak{S}$ la restrizione di $\mathfrak{R}_1$ ad un cerchio del piano di centro 0.

Dimostrare che gli spazi quozienti

$$(\alpha - 0)/\mathfrak{R}_1, \quad (\alpha - 0)/\mathfrak{R}_2, \quad C/\mathfrak{S}$$

sono tutti omeomorfi a C.

Capitolo terzo

Spazi di Hausdorff e assiomi di separazione

1. *Spazi di Hausdorff*

Definizione 1.1. Dicesi *spazio di Hausdorff* (o spazio separato) uno spazio topologico nel quale per ogni coppia di punti distinti x, y esistono un intorno U di x ed uno V di y tra loro disgiunti. La topologia di uno spazio siffatto verrà anche detta di Hausdorff (o separata).

Se la topologia di X è separata, ogni topologia piú fine di quella di X è separata. Si ha inoltre che se X è di Hausdorff, ogni spazio ad esso omeomorfo è di Hausdorff.

Gli spazi topologici con la topologia discreta sono spazi di Hausdorff. Un'ampia classe di spazi siffatti è messa in luce dalla seguente:

Proposizione 1.2. *Ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico con distanza d. Siano x e y due punti distinti di X e sia ε un qualsiasi numero positivo tale che

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\, d(x, y). \tag{1}$$

Proviamo che i dischi $S(x, \varepsilon)$ e $S(y, \varepsilon)$ di raggio ε e centro x e y sono disgiunti. Infatti, se

$$S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

preso un punto $z \in S(x, \varepsilon) \cap S(y, \varepsilon)$ si avrebbe

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < 2\,\varepsilon,$$

in contraddizione con la (1). Q.E.D.