*Prima edizione italiana: gennaio 1968*
*Settima edizione: gennaio 1977*


*V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini*

# Lezioni di topologia generale

Feltrinelli Editore Milano

# *Prefazione*

Questo libro raccoglie le lezioni di topologia generale impartite nei corsi di geometria per studenti di matematica dell'Università di Pisa negli ultimi cinque anni accademici. Gli appunti ciclostilati di tali corsi sono stati rielaborati ed ampliati con esercizi e complementi.

Nella scelta e nel dosaggio degli argomenti ci hanno guidato le esigenze didattiche ed i vari problemi di raccordo con i corsi di algebra e di analisi. Per garantire la possibilità di utilizzare questo libro nel primo biennio di matematica abbiamo rinunciato ad argomenti ed a molti esempi classici che avrebbero richiesto al lettore una conoscenza abbastanza approfondita di vari capitoli dell'algebra e dell'analisi. Citiamo fra essi la teoria dei filtri, delle successioni generalizzate e degli spazi uniformi.

Ne è risultata un'opera che vuole essere un manuale ad uso degli studenti, ma non è certamente un trattato di topologia generale. Di questi ne esistono oggi molti ed ottimi: ad esempio, il libro terzo del Bourbaki, la *General Topology* di Kelley ed il recentissimo libro di Dugundji. Ad essi abbiamo largamente attinto nel preparare lezioni ed esercitazioni, e nella redazione del testo.

Oggi è uso di ogni prefazione che si rispetti ringraziare qualcuno. Vogliamo esprimere la nostra gratitudine agli studenti di matematica di Pisa che, nell'ultimo quinquennio, hanno collaborato — consciamente ed inconsciamente — alla messa a punto del testo.[1]

Passo di Costalunga
10 agosto 1967.

*V. Checcucci*
*A. Tognoli*
*E. Vesentini*

[1] La " Collana di Algebra " è stata ampliata con l'introduzione di nuovi argomenti matematici che non erano prima contemplati e con il contributo di Edoardo Vesentini alla sua direzione accanto a Lucio Lombardo-Radice: il nome della collana è stato quindi cambiato in " Collana di matematica ", ma abbiamo ritenuto opportuno mantenere il numero progressivo con i numeri della precedente collana di algebra.

# *Introduzione*

## 1. *Notazioni*

$$\Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \quad \text{significa “} \Delta_1 \text{ implica } \Delta_2\text{”}$$
$$\Delta_1 \Leftrightarrow \Delta_2 \quad \text{significa “} \Delta_1 \text{ equivale a } \Delta_2\text{”.}$$

Sia $X$ un insieme; esprimeremo il fatto che:

*$x$ è un elemento di $X$* con la notazione $x \in X$;
*$x$ non è un elemento di $X$* con la notazione $x \notin X$;
*$Y$ è un sottoinsieme di $X$* con la notazione $Y \subset X$;
*$Y$ non è un sottoinsieme di $X$* con la notazione $Y \not\subset X$.

Inoltre:

$$Y = \{x \in X \mid \Delta_1, \ \Delta_2 \ \ldots\}$$

indica il sottoinsieme degli elementi $x$ di $X$ per i quali valgono le proprietà $\Delta_1$, $\Delta_2$, ....

Dati due sottoinsiemi $X_1$ e $X_2$ di un insieme $X$, $X_1 \cap X_2$ (*intersezione* di $X_1$ e $X_2$) è il sottoinsieme degli elementi $x$ di $X$ che appartengono sia ad $X_1$ che a $X_2$, ossia

$$X_1 \cap X_2 = \{x \in X \mid x \in X_1, \ x \in X_2\};$$

$X_1 \cup X_2$ (*unione* di $X_1$ e $X_2$) è il sottoinsieme degli elementi $x$ di $X$ che appartengono ad uno almeno dei due sottoinsiemi $X_1$ e $X_2$, ossia

$$X_1 \cup X_2 = \{x \in X \mid x \in X_1, \text{ oppure } x \in X_2\}.$$

$\emptyset$ è l'insieme vuoto. Per ogni insieme $X$ risulta $\emptyset \subset X$, e si ha $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\emptyset \cup A = A$ per ogni sottoinsieme $A$ di $X$.

Due sottoinsiemi non vuoti $X_1$ e $X_2$ di $X$ si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione è vuota, ossia se

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Siano $X_1$, $X_2$, $X_3$ tre sottoinsiemi di $X$; fra unione e intersezione sussistono le relazioni seguenti:

$$(X_1 \cup X_2) \cap X_3 = (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3), \tag{1}$$
$$(X_1 \cap X_2) \cup X_3 = (X_1 \cup X_3) \cap (X_2 \cup X_3). \tag{2}$$

Dati due sottoinsiemi $X_1$ e $X_2$ di $X$, il sottoinsieme $X_1 - X_2$ degli elementi $x$ di $X$ che appartengono a $X_1$ ma non a $X_2$ si dice la differenza fra $X_1$ e $X_2$, ossia

$$X_1 - X_2 = \{x \in X \mid x \in X_1,\ x \notin X_2\}.$$

Se $X_1$ è un sottoinsieme di $X$, la differenza $X - X_1$ si dice anche il *complemento* o l'*insieme complementare* di $X_1$ (in $X$), e si indica con $\complement X_1$, quando sia possibile sottointendere $X$ senza pericolo di equivoci. Tra complementare, unione e intersezione intercedono le relazioni:

$$\complement(X_1 \cup X_2) = \complement X_1 \cap \complement X_2, \tag{3}$$
$$\complement(X_1 \cap X_2) = \complement X_1 \cup \complement X_2. \tag{4}$$

Stabiliamo fin d'ora le notazioni seguenti:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali,
$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali diversi da zero,
$\mathbf{Z}$ è l'anello degli interi relativi,
$\mathbf{Q}$ è il corpo dei numeri razionali,
$\mathbf{R}$ è il corpo dei numeri reali,
$\mathbf{C}$ è il corpo dei numeri complessi.

## 2. *Applicazioni*

Un'*applicazione* $f$ di un insieme $X$ (non vuoto) in un insieme $X'$ (non vuoto), o una *funzione* $f$ su $X$ a valori in $X'$, è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un elemento $x' \in X'$. Si usa scrivere

$$f : X \to X',$$





e indicare con $f(x)$ l'elemento $x'$, che si dice *immagine* di $x$ mediante $f$.

Sia $f : X \to X'$ un'applicazione di $X$ in $X'$ ed $A$ un sottoinsieme di $X$; il sottoinsieme degli elementi $x'$ di $X'$ che sono immagini di qualche elemento $x$ di $A$, si dice l'*immagine* di $A$ mediante $f$ e si indica con $f(A)$; ossia

$$f(A) = \{x' \in X' \mid x' = f(x) \text{ per qualche } x \in A\}.$$

Risulta $f(\emptyset) = \emptyset$. Se $f(X) = X'$; si dice che l'applicazione $f : X \to X'$ è *surgettiva* oppure che $f$ è un'applicazione di $X$ *su* $X'$ o *sopra* $X'$; in altre parole $f$ è surgettiva se ogni elemento $x' \in X'$ è immagine di almeno un elemento $x$ di $X$.

Se $A'$ è un sottoinsieme di $X'$, il sottoinsieme degli elementi $x \in X$ tali che $f(x) \in A'$, si dice l'*immagine inversa* di $A'$ mediante $f$ e si indica con $f^{-1}(A')$; ossia

$$f^{-1}(A') = \{x \in X \mid f(x) \in A'\}.$$

Risulta $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. L'applicazione $f : X \to X'$ si dice *iniettiva* se ogni elemento $x' \in X'$ è l'immagine al piú di un elemento $x$ di $X$, ossia se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. In altre parole $f$ è iniettiva se, per ogni $x' \in f(X)$, l'insieme $f^{-1}(x')$ è costituito da un solo elemento.

Sia $Y$ un sottoinsieme dell'insieme $X$; l'applicazione $i : Y \to X$ che ad ogni $y \in Y$ associa $i(y) = y \in X$, si dice l'*immersione* o *applicazione identica* di $Y$ in $X$. L'applicazione identica $i : Y \to X$ è manifestamente iniettiva.

Un'applicazione $f : X \to X'$ che sia al tempo stesso iniettiva e surgettiva si dice un'*applicazione bigettiva* o *biunivoca* o semplicemente una *bigezione* di $X$ su $X'$.

Siano date le applicazioni $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$; l'applicazione $g \circ f : X \to X''$ definita da:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] \quad \text{per ogni } x \in X,$$

si dice il *prodotto* di $f$ per $g$. Se $f$ e $g$ sono bigezioni, anche $g \circ f$ è una bigezione.

Due insiemi $X$ e $X'$ tra i quali esiste una bigezione si dicono *equipotenti*. Un insieme $X$ equipotente all'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali si dice *numerabile*.

Siano $X_1'$, $X_2'$, $A'$ tre sottoinsiemi qualsiansi di $X'$ e sia $f : X \to X'$ un'applicazione di $X$ in $X'$; tra immagine inversa ed unione, oppure intersezione, intercedono le relazioni:

$$(5) \qquad f^{-1}(X'_1 \cup X'_2) = f^{-1}(X'_1) \cup f^{-1}(X'_2)$$
$$(6) \qquad f^{-1}(X'_1 \cap X'_2) = f^{-1}(X'_1) \cap f^{-1}(X'_2);$$

tra immagine inversa e complementare intercede la relazione:

$$(7) \qquad f^{-1}(\complement A') = \complement f^{-1}(A').$$

Siano $X_1$, $X_2$, $A$ tre sottoinsiemi qualsiansi di $X$ e sia $f: X \to X'$ un'applicazione di $X$ in $X'$. Tra immagine e unione, oppure intersezione, intercedono le relazioni:

$$(8) \qquad f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$
$$(9) \qquad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2),$$

ma, in generale, risulta

$$f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2).$$

Inoltre, in generale, si ha

$$f(\complement A) \neq \complement f(A).$$

Tra immagine e immagine inversa intercorrono le relazioni:

(10) $\quad A \subset f^{-1}[f(A)]$ per ogni sottoinsieme $A$ di $X$,

(11) $\quad f[f^{-1}(A')] \subset A'$ per ogni sottoinsieme $A'$ di $X'$.

Se $f$ è un'applicazione iniettiva, nella (10) vale il segno $=$ al posto di $\subset$; se $f$ è un'applicazione surgettiva, nella (11) vale il segno $=$ al posto di $\subset$.

## 3. *Indici*

È comodo, in certi casi, modificare il linguaggio del paragrafo 2 nel modo seguente: sia $x: I \to X$ un'applicazione dell'insieme $I$ nell'insieme $X$; diremo che $I$ è un insieme di *indici* ed useremo le locuzioni e notazioni seguenti:

1) scriveremo $x_i$ invece che $x(i)$ e diremo che l'elemento $i$ di $I$ è un *indice*;





2) indicheremo con $\{x_i\}_{i\in I}$ l'applicazione $x: I \to X$ od anche l'immagine $x(I)$ di $I$ mediante $x$, e diremo che $\{x_i\}_{i\in I}$ è una *famiglia* di elementi di $X$, indiciata o indicizzata dall'insieme $I$.

Tre casi ci interessano particolarmente nel seguito:

a) l'insieme $I$ degli indici è l'insieme $\mathbf{N}^*$ dei numeri naturali diversi da zero; in tal caso la famiglia $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ si dice una *successione* di $X$.

b) $I$ è l'insieme finito $(1, 2, ..., n)$ dei primi $n$ numeri naturali. In tal caso $\{x_h\}_{1\leq h\leq n}$ si dice una *successione finita* di $X$, od anche un $n$-pla di elementi di $X$.

c) $X$ è l'insieme $\mathscr{P}(Y)$ dei sottoinsiemi di un insieme $Y$. In tal caso la famiglia $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi dell'insieme $Y$.

Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di $X$. Si possono considerare i sottoinsiemi seguenti:

$\bigcap_i X_i = \{x \in X \mid x \in X_i$ per ogni $i \in I\}$ (*intersezione* della famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$);

$\bigcup_i X_i = \{x \in X \mid x \in X_i$ per qualche $i \in I\}$ (*unione* della famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$).

Ne sono un caso particolare (quando $I = \{1, 2,\}$) l'intersezione e l'unione di due sottoinsiemi, considerate nel paragrafo 1.

In modo ovvio le relazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9) si estendono ad una famiglia qualunque di sottoinsiemi. Ad esempio per due famiglie $\{X_i\}_{i\in I}$ e $\{X'_j\}_{j\in J}$ di sottoinsiemi di un insieme $X$ valgono le analoghe delle (1) e (2):

$$(1') \qquad (\bigcup_i X_i) \cap (\bigcup_j X'_j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (X_i \cap X'_j)$$
$$(2') \qquad (\bigcap_i X_i) \cup (\bigcap_j X'_j) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (X_i \cup X'_j).$$

Una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di un insieme $X$ si dice un *ricoprimento* di $X$ se $\bigcup_i X_i = X$, ossia se ogni $x \in X$ è elemento di almeno un $X_i$.

La famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ si dice una *partizione* di $X$ se:

1) $X_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$;
2) $\bigcup_i X_i = X$;
3) $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

In altre parole una partizione di $X$ è un ricoprimento di $X$ con sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti.

## 4. *Prodotti cartesiani*

Siano $X_1$ e $X_2$ due insiemi (distinti o coincidenti). L'insieme delle coppie $(x_1, x_2)$, dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, si dice il *prodotto* (o *prodotto cartesiano*) di $X_1$ e $X_2$; esso viene indicato con $X_1 \times X_2$.

Piú in generale, data una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di insiemi $X_i$, si dice *prodotto* (o *prodotto cartesiano*) della famiglia l'insieme $X = \prod_{i\in I} X_i$ delle famiglie $x = \{x_i\}_{i\in I}$, dove $x_i \in X_i$ per ogni $i \in I$.

Se $X_1, \ldots, X_n$ è una famiglia finita di insiemi, il prodotto di $X_1, \ldots, X_n$ si indica anche con $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Se $X_i = Y$ per ogni $i \in I$, il prodotto $\prod_i X_i$ è l'insieme delle famiglie $x = \{x_i\}_{i\in I}$ di elementi di $Y$, ossia è l'insieme delle applicazioni $x: I \to Y$. In tal caso il prodotto $\prod_i X_i$ si indica anche con $Y^I$. In particolare, se $I$ è l'insieme $\mathbf{N}^*$ dei numeri naturali diversi da zero e $Y$ è l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ è l'insieme delle successioni ad elementi reali. Se $I$ è l'insieme finito $\{1, 2, \ldots, n\}$, allora

$$\mathbf{R}^I = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$$

è l'insieme delle $n$-ple di numeri reali, e si denota anche con $\mathbf{R}^n$.

Torniamo ad un prodotto qualunque $X = \prod_i X_i$. Consideriamo per ogni $j \in I$ l'applicazione surgettiva $p_j : X \to X_j$ definita da $p_j(\{x_i\}_{i\in I}) = x_j$ per ogni $x = \{x_i\}_{i\in I} \in X$.

L'applicazione $p_j$ si dice la $j$-ma *proiezione canonica* del prodotto $\prod_i X_i$.

Siano date una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i\in I}$ ed una famiglia di applicazioni $\{f_i : Z \to X_i\}_{i\in I}$ di uno stesso insieme $Z$ negli insiemi $X_i$. L'applicazione $f : Z \to \prod_i X_i$ definita da $f(z) = \{f_i(z)\}_{i\in I}$ per ogni $z \in Z$ è univocamente determinata dalle relazioni:

$$p_i \circ f = f_i : Z \to X_i \quad \text{per ogni } i \in I.$$

Siano $A$ e $B$ sottoinsiemi di $X$, $C$ e $D$ sottoinsiemi di $Y$; si verificano immediatamente le relazioni seguenti tra intersezione, unione, prodotto cartesiano:

$$(A \cap B)\times(C \cap D) = (A\times C) \cap (B\times D) = (A\times D) \cap (B\times C)$$
$$(A \cup B)\times(C \cup D) = (A\times C) \cup (B\times D) \cup (A\times D) \cup (B\times C)$$





## 5. *Relazioni, relazioni di equivalenza ed insiemi quoziente*

Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme $X$ è un insieme di coppie ordinate di elementi di $X$, ossia un sottoinsieme del prodotto $X \times X$. Se $\mathfrak{R}$ è una relazione, esprimeremo il fatto che $(x, y) \in \mathfrak{R}$ con la notazione $x \,\mathfrak{R}\, y$ e diremo che $x$ è in relazione con $y$.

Tra le relazioni $\mathfrak{R}$ nell'insieme $X$ hanno particolare interesse i casi seguenti:

1) $\mathfrak{R}$ è *riflessiva* se $x \,\mathfrak{R}\, x$ per ogni $x \in X$.
2) $\mathfrak{R}$ è *simmetrica* se $x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow y \,\mathfrak{R}\, x$.
3) $\mathfrak{R}$ è *transitiva* se $(x \,\mathfrak{R}\, y,\ y \,\mathfrak{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathfrak{R}\, z$.
4) $\mathfrak{R}$ è *antisimmetrica* se $(x \,\mathfrak{R}\, y,\ y \,\mathfrak{R}\, x) \Rightarrow x = y$.

Una relazione $\mathfrak{R}$ riflessiva, simmetrica e transitiva si dice una *relazione di equivalenza* in $X$.

Sia data in $X$ una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$. Per ogni elemento $x \in X$ chiameremo *classe di $\mathfrak{R}$-equivalenza* o brevemente *classe di equivalenza* di $x$ in $X$ il sottoinsieme degli elementi $y \in X$ tali che $x \,\mathfrak{R}\, y$.

Tra le relazioni $\mathfrak{R}$ di equivalenza in $X$, la relazione di eguaglianza $(x = y)$ è caratterizzata dal fatto che ogni sua classe di equivalenza è costituita da un solo elemento.

È immediato constatare che le classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza costituiscono una partizione di $X$. Sia $Y$ l'insieme che ha per *elementi* le classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza della relazione $\mathfrak{R}$ in $X$.

Diremo che $Y$ è l'insieme *quoziente* di $X$ modulo la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ e lo indicheremo anche con $X/\mathfrak{R}$. L'applicazione che associa ad ogni $x \in X$ la classe di $\mathfrak{R}$-equivalenza di $x$ è un'applicazione surgettiva $\pi : X \to X/\mathfrak{R}$. Essa si dice la *proiezione naturale* di $X$ sul quoziente $X/\mathfrak{R}$.

Sia viceversa $Y$ un insieme i cui elementi sono una partizione dell'insieme $X$. La relazione $\mathfrak{R}$ in $X$ cosí definita:

> " $x \,\mathfrak{R}\, y$ significa che $x$ ed $y$ appartengono allo stesso elemento di $Y$ "

è una relazione di equivalenza in $X$, il cui insieme quoziente $X/\mathfrak{R}$ è $Y$.

Sia data un'applicazione $f : X \to X'$. La relazione cosí definita:

$$\text{“ } x \,\mathfrak{R}\, y \text{ significa } f(x) = f(y) \text{ ”}$$

è una relazione di equivalenza in $X$, che diremo *indotta* dall'applicazione $f$. Le classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza sono le immagini inverse degli elementi di $f(X)$. Sia $\pi : X \to X/\mathfrak{R}$ la proiezione canonica di $X$ sull'insieme quoziente di $X$ modulo la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ indotta dall'applicazione $f$. Esiste una ed una sola applicazione $g : X/\mathfrak{R} \to X'$ tale che

$$g \circ \pi = f : X \to X',$$

ossia tale che

$$g[\pi(x)] = f(x) \text{ per ogni } x \in X.$$

L'applicazione $g$ è iniettiva; infatti se $u$, $v$ sono due classi di $\mathfrak{R}$-equivalenza tali che $g(u) = g(v)$ ed $x \in u$, $y \in v$, si ha $f(x) = f(y)$ e quindi $u = v$.

### 6. *Relazioni d'ordine*

Una relazione $\mathfrak{R}$ riflessiva e transitiva si dice un *ordinamento parziale* di $X$ e si denota scrivendo $x \leqslant y$. Dunque la relazione $\leqslant$ è un ordinamento parziale in $X$ se:

1) $x \leqslant x$ per ogni $x \in X$;

2) $(x \leqslant y,\ y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

Un ordinamento parziale $\leqslant$ in $X$ si dice un *ordinamento* se la relazione $\leqslant$ è anche antisimmetrica, ossia se (oltre a 1) e 2)) si ha:

3) $(x \leqslant y,\ y \leqslant x) \Rightarrow x = y$.

Infine un ordinamento $\leqslant$ in $X$ si dice un ordinamento *totale*, (o *semplice*, o *lineare*) se (oltre a 1), 2), 3)) si ha:

4) Per ogni $x, y \in X$ risulta $x \leqslant y$, oppure $y \leqslant x$.

*Esempi:*

1) Nell'anello **Z** degli interi relativi la relazione

"$m \leqslant n$ se esiste $p \in \mathbf{Z}$, $p \neq 0$ tale che $m = np$"

è un ordinamento parziale, che non è un ordinamento.

2) Sia $X$ un insieme con almeno due elementi. Nell'insieme $\mathscr{P}(X)$ dei sottoinsiemi di $X$, la relazione

"$A \leqslant B$ significa $A \subset B$"

è un ordinamento, che non è un ordinamento totale.





3) Nell'insieme **R** dei numeri reali l'ordinamento naturale (di corpo ordinato) $x \leqslant y$ è un ordinamento totale.

Un insieme $X$ parzialmente ordinato (oppure ordinato, oppure totalmente ordinato) è un insieme con una relazione di ordinamento parziale (oppure di ordinamento, oppure di ordinamento totale), e viene denotato con $(X, \leqslant)$.

Sia $Y$ un sottoinsieme di un insieme parzialmente ordinato (oppure ordinato, oppure totalmente ordinato) $(X, \leqslant)$; la relazione $\leqslant$ induce una relazione di egual tipo in $Y$. Ad esempio l'ordinamento naturale di **N**, oppure di **Z**, oppure di **Q** è quello indotto dall'ordinamento naturale di **R**.

Un sottoinsieme $Y$ di un insieme ordinato $(X, \leqslant)$ si dice *cofinale* ad $X$ se per ogni $x \in X$, esixte un $y \in Y$ tale che $x \leqslant y$.

I sottoinsiemi cofinali dell'insieme ordinato **N** dei numeri naturali sono i sottoinsiemi infiniti di **N**.

Se nell'insieme ordinato $(X, \leqslant)$ esiste un elemento $x_0$ tale che $x_0 \leqslant x$ per ogni $x \in X$, si dice che $x_0$ è il *minimo* di $X$ (necessariamente unico); se in $X$ esiste un elemento $x_1$ tale che $x \leqslant x_1$ per ogni $x \in X$, si dice che $x_1$ è il *massimo* di $X$ (necessariamente unico).

Un elemento $x_0$ dell'insieme ordinato $(X, \leqslant)$ si dice *minimale* se

$$x \leqslant x_0 \Rightarrow x = x_0;$$

un elemento $x_1$ si dice *massimale* se

$$x_1 \leqslant x \Rightarrow x = x_1.$$

Se $(X, \leqslant)$ è totalmente ordinato, un suo elemento minimale è il minimo e un suo elemento massimale è il massimo. Se $(X, \leqslant)$ non è totalmente ordinato, possono esistere elementi minimali, oppure massimali, distinti. Ad esempio, se $X$ è l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di un insieme $Y$ con almeno due elementi, ordinato con l'inclusione, gli elementi di $Y$ sono elementi minimali di $X$.

Sia $(X, \leqslant)$ un insieme che nel seguito del paragrafo supponiamo totalmente ordinato. Consideriamo in $X$ la relazione

$$x < y \text{ significa } x \leqslant y \text{ ed } x \neq y.$$

Se $a$, $b$ sono due elementi di $X$ tali che $a < b$, si chiamano *intervalli* di estremi $a$, $b$ i sottoinsiemi:

$]a, b[ = \{x \in X \mid a < x < b\}$ (intervallo aperto)
$]a, b] = \{x \in X \mid a < x \leqslant b\}$ (intervallo chiuso a destra)
$[a, b[ = \{x \in X \mid a \leqslant x < b\}$ (intervallo chiuso a sinistra)
$[a, b] = \{x \in X \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervallo chiuso).

Si chiamano intervalli infiniti i sottoinsiemi:

$]-\infty, a[ = \{x \in X \mid x < a\}$ (intervallo aperto infinito a sinistra)
$]-\infty, a] = \{x \in X \mid x \leqslant a\}$ (intervallo chiuso infinito a sinistra)
$]a, +\infty[ = \{x \in X \mid a < x\}$ (intervallo aperto infinito a destra)
$[a, +\infty[ = \{x \in X \mid a \leqslant x\}$ (intervallo chiuso infinito a destra)

L'insieme ordinato $X$ si dice *denso* se $]a, b[ \neq \emptyset$ per ogni $a$, $b \in X$ tali che $a < b$. Sia $Y$ un sottoinsieme di $X$; si dice che $Y$ è *denso in* $X$ se $]a, b[ \cap Y \neq \emptyset$ per ogni $a$, $b \in X$ tali che $a < b$.

Sia $Y$ un sottoinsieme dell'insieme totalmente ordinato $(X, \leqslant)$. Un elemento $x \in X$ si dice un *maggiorante* di $Y$ se $y \leqslant x$ per ogni $y \in Y$. Sia $Y^*$ l'insieme dei maggioranti di $Y$; si dice che $Y$ è *superiormente limitato* se $Y^* \neq \emptyset$, ossia se esiste almeno un maggiorante di $Y$. Un elemento $x \in X$ si dice un *minorante* di $Y$ se $x \leqslant y$ per ogni $y \in Y$. Sia $Y_*$ l'insieme dei minoranti di $Y$; si dice che $Y$ è *inferiormente limitato* se $Y_* \neq \emptyset$, ossia se esiste almeno un minorante di $Y$. Hanno particolare interesse gli insiemi totalmente ordinati $(X, \leqslant)$ che sono densi e per i quali vale la proprietà seguente:

" per ogni sottoinsieme superiormente limitato $Y$ di $X$, esiste il minimo dell'insieme $Y^*$ dei maggioranti di $Y$".

Questo minimo si dice l'*estremo superiore* di $Y$ e si indica con Sup. $Y$.

Se $Y$ è un sottoinsieme inferiormente limitato di un insieme $(X, \leqslant)$ che è denso e ha la proprietà suddetta, esiste il massimo dell'insieme $Y_*$ dei minoranti di $Y$ (è l'estremo superiore di $Y_*$). Questo massimo si dice l'*estremo inferiore* di $Y$ e si indica con Inf. $Y$.

L'insieme totalmente ordinato $(\mathbf{R}, \leqslant)$ dei numeri reali ha la suddetta proprietà dell'estremo superiore; il sottoinsieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbf{R}$; il sottoinsieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è cofinale ad $\mathbf{R}$ (principio di Archimede).



*Capitolo primo*

# *Spazi topologici e funzioni continue*

## 1. *Topologie su un insieme*

*Definizione* 1.1. Una *struttura topologica* — brevemente una *topologia* — su un insieme $X$ è una famiglia $\tau$ di sottoinsiemi di $X$ soddisfacente agli assiomi seguenti:

a) $X$ e l'insieme vuoto $\emptyset$ appartengono a $\tau$.
b) Ogni unione di elementi di $\tau$ appartiene a $\tau$.
c) L'intersezione di ogni famiglia finita di elementi di $\tau$ appartiene a $\tau$.

Gli elementi di $\tau$ sono chiamati gli *insiemi aperti* — o brevemente gli *aperti* — della struttura topologica definita da $\tau$ su $X$.

*Definizione* 1.2. *Spazio topologico* è un insieme munito di una struttura topologica. Gli elementi di uno spazio topologico $X$ si dicono i *punti* di $X$.

*Definizione* 1.3. Un sottoinsieme $Y$ di uno spazio topologico $X$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\complement Y = X - Y$ è aperto.

Un sottoinsieme chiuso di $X$ si dice anche un chiuso della topologia di $X$. Sia $\sigma$ la famiglia dei chiusi di $X$. Passando ai complementari, dalle condizioni a), b), c) della definizione 1.1 segue subito la

*Proposizione* 1.4. *La famiglia $\sigma$ dei chiusi di uno spazio topologico $X$ ha le proprietà seguenti:*

a') *L'insieme vuoto $\emptyset$ ed $X$ appartengono a $\sigma$.*
b') *Ogni intersezione di elementi di $\sigma$ appartiene a $\sigma$.*
c') *L'unione di ogni famiglia finita di elementi di $\sigma$ appartiene a $\sigma$.*

Le proprietà a'), b'), c') della proposizione 1.4 possono essere assunte come assiomi di una topologia su $X$, nel senso precisato dalla:

*Proposizione* 1.5. *Sia data in un insieme $X$ una famiglia $\sigma$ di sottoinsiemi con le proprietà* a′), b′), c′). *Esiste una ed una sola topologia su $X$ per la quale $\sigma$ è la famiglia dei chiusi.*

*Dimostrazione.* Sia $\tau$ la famiglia dei sottoinsiemi di $X$ che sono complementari di elementi di $\sigma$; ogni topologia su $X$ che ha $\sigma$ come famiglia dei chiusi, deve avere $\tau$ come famiglia degli aperti. Ciò prova l'unicità della topologia richiesta.

D'altra parte è immediato verificare che:

1) La famiglia $\tau$ dei complementari degli elementi di $\sigma$ ha le proprietà a), b), c), e quindi definisce una topologia su $X$.

2) I chiusi della topologia definita in 1) sono gli elementi della famiglia $\sigma$ da cui siamo partiti. Q.E.D.

*Esempi*

[1.1] Su un insieme qualunque $X$ la famiglia $\tau = \{X, \emptyset\}$ di sottoinsiemi di $X$ soddisfa le a), b), c) della definizione 1.1 e quindi $\tau$ è una topologia su $X$.

[1.2] Su un insieme qualunque $X$ la famiglia $\tau = \mathscr{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di $X$ soddisfa le a), b), c) e quindi $\mathscr{P}(X)$ è una topologia su $X$. Questa prende il nome di *topologia discreta.*

Per comodità di linguaggio, sia pure impropriamente, chiameremo *topologia indiscreta* la topologia dell'esempio 1.1.

[1.3] Su un insieme qualunque $X$ la famiglia $\sigma$ costituita da $X$ e da tutti i sottoinsiemi finiti di $X$ verifica le a′), b′), c′) della proposizione 1.4, e quindi $\sigma$ è la famiglia dei chiusi di una topologia su $X$. Questa topologia coincide con la topologia discreta se, e soltanto se, $X$ è un insieme finito.

[1.4] Sia $(X, \leqslant)$ un insieme totalmente ordinato e sia $\tau$ la famiglia costituita da $\emptyset$ e da tutti i sottoinsiemi $A$ che hanno la proprietà seguente:

"per ogni $x \in A$ ed ogni $y \leqslant x$ si ha $y \in A$".

La famiglia $\tau$ verifica gli assiomi degli aperti e quindi definisce una topologia su $X$. Però questa stessa famiglia verifica anche gli assiomi dei chiusi, ossia è la famiglia dei chiusi di un'altra topologia su $X$ (la topologia definita come la topologia $\tau$, ma a partire dall'ordinamento opposto).





Siano $\tau_1$ e $\tau_2$ due topologie sullo stesso insieme $X$.

*Definizione* 1.6. La topologia $\tau_1$ si dice *piú fine* della topologia $\tau_2$ od anche la topologia $\tau_2$ si dice *meno fine* della topologia $\tau_1$, se $\tau_2 \subset \tau_1$, i.e. se ogni aperto della topologia $\tau_2$ è un aperto della topologia $\tau_1$. Si dice inoltre che $\tau_1$ è *strettamente piú fine* di $\tau_2$ (o che $\tau_2$ è *strettamente meno fine* di $\tau_1$) se $\tau_2 \subsetneq \tau_1$.

La relazione $\tau_2 \subset \tau_1$, introdotta con la definizione 1.6 nell'insieme delle topologie su $X$, definisce in tale insieme un ordinamento, che in generale non è totale.

In ogni insieme $X$ la topologia indiscreta è meno fine, e la topologia discreta è piú fine, di ogni altra topologia di $X$.

Si verifica immediatamente che in un insieme $X$ la topologia $\tau_2$ è meno fine della topologia $\tau_1$ se, e soltanto se, ogni chiuso della topologia $\tau_2$ è chiuso anche nella topologia $\tau_1$.

## 2. *Funzioni continue*

Siano $X$ ed $X'$ due spazi topologici e sia $f : X \to X'$ un'applicazione di $X$ in $X'$.

*Definizione* 2.1. Diremo che $f$ è un'applicazione *continua* se l'immagine inversa $f^{-1}(A')$ di ogni aperto $A'$ di $X'$ è un aperto di $X$ (cioè se, per ogni aperto $A'$ di $X'$, è un aperto di $X$ l'insieme degli $x \in X$ tali che $f(x) \in A'$).

Ricordiamo che, date le applicazioni $f$: $X \to X'$ e $g$: $X' \to X''$, si definisce il prodotto $g \circ f$: $X \to X''$ ponendo $g \circ f(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in X$.

*Teorema* 2.2. *Siano $X$, $X'$, $X''$ tre spazi topologici, e siano $f$: $X \to X'$, $g$: $X' \to X''$ due applicazioni continue; allora $g \circ f$ è un'applicazione continua.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ un aperto di $X''$; poiché $g$ è continua, $g^{-1}(A)$ è un aperto di $X'$. Poiché $f$ è continua, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è un aperto di $X$. D'altra parte

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)),$$

e quindi $(g \circ f)^{-1}(A)$ è un aperto di $X$. Q.E.D.

Il teorema 2.2 si estende in modo ovvio al prodotto di un qualsiasi numero finito di applicazioni continue.

*Proposizione* 2.3. *Sia $f$: $X \to X'$ un'applicazione continua di uno spazio topologico $X$ in uno spazio topologico $X'$. L'applicazione $f$ resta continua se si sostituisce la topologia di $X$ con una topologia piú fine e la topologia di $X'$ con una topologia meno fine.*

*Dimostrazione.* Ogni aperto di una topologia meno fine della topologia di $X'$ è un aperto di $X'$. L'immagine inversa (mediante $f$) di ogni aperto di $X'$ è aperto per ogni topologia piú fine della topologia di $X$. Q.E.D.

La proposizione seguente caratterizza le applicazioni continue mediante gli insiemi chiusi.

*Proposizione* 2.4. *Un'applicazione $f$ di uno spazio topologico $X$ in uno spazio topologico $X'$ è continua se, e soltanto se, l'immagine inversa di ogni chiuso di $X'$ è un chiuso di $X$.*

*Dimostrazione.* Se $B$ è un sottoinsieme qualunque di $X'$, si ha

$$f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B).$$

Sia $f$ continua. Se $B$ è un chiuso di $X'$, $\complement B$ è aperto. Per la formula precedente $\complement f^{-1}(B)$ è aperto, e quindi $f^{-1}(B)$ è chiuso.

Supponiamo ora che l'immagine inversa di ogni chiuso di $X'$ sia un chiuso di $X$. Se $B$ è un aperto qualsiasi di $X'$, $\complement B$ è chiuso. Per la formula precedente $\complement f^{-1}(B)$ è chiuso, ossia $f^{-1}(B)$ è aperto. Dunque $f$ è continua. Q.E.D.

*Esempi*

[2.1] Ogni applicazione costante $f$: $X \to X'$ ($f(x) = f(y)$ per ogni $x, y \in X$) è continua, qualsiansi siano le topologie di $X$ e di $X'$.

[2.2] Se $X$ ha la topologia discreta, ogni applicazione $f$: $X \to X'$ è continua. Se $X$ ha la topologia dell'esempio 1.1, $f$: $X \to X'$ è continua se, e soltanto se, ogni aperto $A'$ di $X'$ non disgiunto dall'immagine $f(X)$ di $X$ contiene $f(X)$.

[2.3] Se $X'$ ha la topologia dell'esempio 1.1, ogni applicazione $f$: $X \to X'$ è continua. Se $X'$ ha la topologia discreta, un'applicazione $f$: $X \to X'$ è continua se, e soltanto se, $X$ è unione di una famiglia di aperti disgiunti, ciascuno dei quali ha per immagine un punto di $X$.





[2.4] $X$ e $X'$ abbiano entrambi la topologia dell'esempio 1.3. Un'applicazione $f$: $X \to X'$, che non è costante, è continua se, e soltanto se, l'immagine inversa di ogni punto di $X'$ è un sottoinsieme finito di $X$.

*Definizione* 2.5. Un *omeomorfismo* $f$ di uno spazio topologico $X$ su uno spazio topologico $X'$ (od una *trasformazione topologica* di $X$ su $X'$) è un'applicazione bigettiva dell'insieme $X$ sull'insieme $X'$ tale che $f$ ed $f^{-1}$ siano entrambe continue. Due spazi $X$, $X'$ fra i quali esista un omeomorfismo, si diranno *omeomorfi*.

Sia $f$: $X \to X'$ un'applicazione surgettiva di uno spazio $X$ su uno spazio $X'$. È immediato constatare che:

*Proposizione* 2.6. *L'applicazione $f$ è un omeomorfismo se, e soltanto se, sono soddisfatte le due condizioni seguenti:*

a) *$f$ è iniettiva;*
b) *un sottoinsieme $A$ di $X$ è aperto in $X$ (oppure è chiuso in $X$) allora ed allora soltanto che $f(A)$ è aperto in $X'$ (oppure è chiuso in $X'$).*

*Dimostrazione.* Siccome $f$ è surgettiva, la a) assicura che $f$ è bigettiva, mentre la b) equivale ad affermare che $f$ ed $f^{-1}$ sono continue. Q.E.D.

*Proposizione* 2.7. *Sia $f$ un'applicazione continua dello spazio topologico $X$ nello spazio topologico $X'$. $f$ è un omeomorfismo se, e soltanto se, esiste un'applicazione continua $g$: $X' \to X$ tale che $g \circ f$: $X \to X$ e $f \circ g$: $X' \to X'$ siano le applicazioni identiche su $X$ e $X'$.*

*Dimostrazione.* Dalla

$$g \circ f = \text{identità su } X$$

segue che $f$ è iniettiva e $g$ è surgettiva; dalla $f \circ g =$ id. su $X'$ segue altresí che $f$ è surgettiva. In definitiva $f$ è bigettiva, $f^{-1} = g$ ed entrambe sono continue. Q.E.D.

Siano date su un insieme $X$ due topologie $\tau_1$ e $\tau_2$. Indichiamo con $X_1$ l'insieme $X$ con la topologia $\tau_1$, e con $X_2$ l'insieme $X$ con la topologia $\tau_2$. Sia $i$: $X_1 \to X_2$ l'applicazione identica di $X_1$ in sé, considerata come applicazione di $X_1$ su $X_2$.

*Proposizione* 2.8. *La topologia $\tau_1$ è piú fine della topologia $\tau_2$ se, e soltanto se, $i$: $X_1 \to X_2$ è continua.*

*Dimostrazione.* Se $\tau_1$ è piú fine di $\tau_2$, $i$ è continua per la proposizione 2.3. Inversamente se $i$ è continua, ogni aperto di $X_2$ è aperto in $X_1$. Pertanto $\tau_2 \subset \tau_1$. Q.E.D.

In particolare $i$: $X_1 \to X_2$ è un omeomorfismo se, e soltanto se, $\tau_1 = \tau_2$.

*Esempi*

[2.5] Siano $X$, $X'$ due spazi topologici con la topologia dell'esempio 1.3. Un'applicazione $f$: $X \to X'$ è un omeomorfismo se, e solo se, $f$ è bigettiva.

[2.6] Se $X$ ha almeno due punti e $X_1$, $X_2$ sono l'insieme $X$ dotato, rispettivamente, della topologia discreta e della topologia indiscreta, l'applicazione identica è bigettiva e continua, ma non è un omeomorfismo.

## 3. *Basi di una topologia*

Quando si definisce una topologia in un insieme $X$, è talvolta utile — anziché prendere in esame *tutti* gli aperti di $X$ — considerarne una famiglia piú ristretta, a partire dalla quale sia possibile costruire ogni aperto di $X$ nel modo che ora indicheremo.

*Definizione* 3.1. *Base* di uno spazio topologico $X$ è una famiglia $\mathfrak{B}$ di aperti non vuoti di $X$ tale che ogni aperto di $X$ sia unione di elementi di $\mathfrak{B}$.

In particolare l'insieme vuoto $\emptyset$ è unione della famiglia vuota di elementi di $\mathfrak{B}$.

*Teorema* 3.2. *Sia $\mathfrak{B}$ una base di uno spazio topologico $X$. Valgono le affermazioni seguenti:*

a) *per ogni $x \in X$, esiste un elemento $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B$;*
b) *se $B_1$ e $B_2$ sono due elementi di $\mathfrak{B}$, tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, e $x \in B_1 \cap B_2$, esiste un elemento $B \in \mathfrak{B}$, tale che $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

*Dimostrazione.* Poiché $X$ è aperto, esso è unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Ne segue la a).





Siano $B_1$ e $B_2$ due elementi di $\mathfrak{B}$, tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. $B_1 \cap B_2$ è un aperto e — come tale — è unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Ne segue la b). Q.E.D.

*Osservazione.* Un enunciato equivalente alla a) è il seguente:

a′)
$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X,$$

o, come si usa dire, la famiglia $\mathfrak{B}$ è un *ricoprimento* di $X$.

Le proprietà a), b) possono essere assunte come assiomi di una topologia su $X$ nel senso precisato dal seguente teorema:

*Teorema* 3.3. *Sia data in un insieme $X$ una famiglia $\mathfrak{B}$ di sottoinsiemi non vuoti per i quali valgono le proprietà* a), b) *del teorema precedente. Esiste una ed una sola topologia su $X$ per la quale $\mathfrak{B}$ è una base.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista (almeno) una topologia siffatta in $X$. Un sottoinsieme di $X$ è aperto se, e soltanto se, esso è unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Pertanto una tale topologia, se esiste, è unica.

Proviamo che essa esiste. Diremo dunque che un sottoinsieme $A$ di $X$ è aperto se, e soltanto se, $A$ è unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Segue da a) che $X$ è aperto. L'insieme vuoto $\emptyset$ è aperto, come unione della famiglia vuota di elementi di $\mathfrak{B}$.

L'unione di una famiglia di aperti è ancora un'unione di elementi di $\mathfrak{B}$, e quindi è un aperto.

Siano $B_1$ e $B_2$ due elementi di $\mathfrak{B}$ tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste, in virtú di b), un $B_x \in \mathfrak{B}$ tale che

$$x \in B_x \subset B_1 \cap B_2.$$

Pertanto

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B_x$$

ossia l'intersezione di due qualunque elementi di $\mathfrak{B}$ è aperta (nel senso detto sopra).

Siano $U$, $V$ due aperti di $X$. Essi sono unione

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i\,; \quad V = \bigcup_{j \in J} B_j$$

di elementi $B_i$ e $B_j$ di $\mathfrak{B}$. Risulta

$$U \cap V = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} B_i \cap B_j\,,$$

sicché $U \cap V$, come unione di aperti, è aperto. Segue da ciò che l'intersezione di ogni famiglia finita di aperti è un aperto. Dunque $X$ è uno spazio topologico.

Poiché un sottoinsieme di $X$ è aperto se, e soltanto se, esso è unione di elementi di $\mathfrak{B}$, questi ultimi sono aperti e $\mathfrak{B}$ è una base. Q.E.D.

*Osservazione.* Se $\tau$ è una topologia su $X$ e $\mathfrak{B}$ è una famiglia di aperti di $\tau$ con le proprietà a), b) del teorema 3.2, la topologia che ha $\mathfrak{B}$ come base è meno fine della topologia $\tau$.

*Esempi*

[3.1] In un insieme $X$ la famiglia dei punti di $X$ (ossia dei sottoinsiemi di $X$ costituiti da un sol punto) è una base di una topologia su $X$, e questa è la topologia discreta.

[3.2] Sia $\mathfrak{B}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di $X$ che ricopra $X$, e tale che, se $B_1$ e $B_2$ sono elementi di $\mathfrak{B}$, anche $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$; allora $\mathfrak{B}$ è una base di una topologia su $X$.

[3.3] Nell'insieme ordinato $\mathbf{R}$ dei numeri reali, la famiglia $\mathfrak{B}$ degli intervalli (aperti) $]a, b[ = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, con $a$, $b$ numeri reali qualsiansi, purché $a < b$, è base di una topologia su $\mathbf{R}$. L'insieme $\mathbf{R}$ con questa topologia prende il nome di *retta reale*. La topologia discreta di $\mathbf{R}$ è strettamente piú fine della topologia della retta reale.

Considerazioni del tutto analoghe valgono per l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali e l'insieme $\mathbf{Q}$ dotato della topologia corrispondente prende il nome di *retta razionale*.

Le applicazioni continue sono caratterizzate mediante una base dalla

*Proposizione* 3.4. *Siano $X$, $X'$ due spazi topologici, e sia $\mathfrak{B}$ una base di $X'$. Un'applicazione $f$: $X \to X'$ è continua se, e soltanto se, $f^{-1}(B)$ è un aperto di $X$ per ogni elemento $B$ di $\mathfrak{B}$.*

*Dimostrazione.* Se $A$ è un aperto di $X'$, si può scrivere

$$A = \bigcup_i B_i \quad \text{con} \quad B_i \in \mathfrak{B}.$$

Risulta

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

e quindi $f^{-1}(A)$ è aperto in quanto unione di aperti. Q.E.D.





*Esempio*

[3.4] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale. Un'applicazione $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ surgettiva e crescente (oppure decrescente) è un omeomorfismo.

Un *ricoprimento* $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di un insieme $X$, ossia una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di $X$ tale che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, soddisfa alla a) del teorema 3.2, ma non è necessariamente base di una topologia. Vale però la:

*Proposizione* 3.5. *Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un insieme $X$ tale che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Esiste una ed una sola topologia $\tau$ su $X$ avente la proprietà seguente: $\tau$ è la topologia meno fine tra le topologie nelle quali è aperto ogni $U_i$ di $\mathfrak{U}$. Una base di $\tau$ è la famiglia $\mathfrak{B}$ delle intersezioni finite non vuote di elementi di $\mathfrak{U}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathfrak{B}$ la famiglia delle intersezioni finite non vuote di elementi di $\mathfrak{U}$. Dalla c) della definizione 1.1 segue che ogni topologia $\tau'$ nella quale è aperto ogni elemento di $\mathfrak{U}$, contiene $\mathfrak{B}$ come sottofamiglia. È d'altra parte evidente che $\mathfrak{B}$ ha le proprietà a), b) del teorema 3.2. Tenuto conto dell'osservazione dopo il teorema 3.3, la topologia $\tau$, di cui $\mathfrak{B}$ è una base, è meno fine di $\tau'$. Q.E.D.

*Definizione* 3.6. Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento di $X$ con sottoinsiemi non vuoti. La topologia di $X$ meno fine tra le topologie nelle quali è aperto ogni elemento di $\mathfrak{U}$, si dice la topologia *generata* da $\mathfrak{U}$.

*Esempio*

[3.5] Siano $\tau_1$ e $\tau_2$ due topologie su $X$, e sia $\mathfrak{U} = \tau_1 \cup \tau_2$ la famiglia dei sottoinsiemi di $X$ che sono aperti di $\tau_1$, oppure di $\tau_2$. La topologia $\tau$ generata da $\mathfrak{U}$ è la topologia meno fine tra le topologie che sono piú fini di $\tau_1$ e $\tau_2$; inoltre la topologia $\tau$ ha per base la famiglia $\mathfrak{B}$ dei sottoinsiemi di $X$ che sono intersezione di un aperto di $\tau_1$ con un aperto di $\tau_2$ (o, piú in generale, è base di $\tau$ la famiglia $\mathfrak{B} = \{B_1 \cap B_2\}$ dove $B_1$ e $B_2$ sono elementi, rispettivamente, di una base $\mathfrak{B}_1$ di $\tau_1$ e una base $\mathfrak{B}_2$ di $\tau_2$).

Infatti, per la proposizione 3.5, una base di $\tau$ è la famiglia $\mathfrak{B}$ delle intersezioni finite non vuote di elementi di $\mathfrak{U}$. Dalla b) della definizione 1.1 segue che ogni elemento di $\mathfrak{B}$ è intersezione di un aperto di $\tau_1$ con un aperto di $\tau_2$.

## 4. *Spazi metrici*

Sia $X$ un insieme. Una *distanza* su $X$ è una funzione $d$ a valori reali sul prodotto cartesiano $X \times X$, ossia è un'applicazione $d: X \times X \to \mathbf{R}$, tale che, per ogni scelta di $x, y, z$ in $X$, si abbia:

I. $d(x, y) \geqslant 0$

II. $d(x, y) = d(y, x)$

III. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (relazione triangolare)

IV. $d(x, y) = 0$ se, e soltanto se, $x = y$.

Il valore $d(x, y)$ di $d$ nella coppia $(x, y) \in X \times X$ si chiama la *distanza* tra i punti $x$ ed $y$.

*Definizione* 4.1. *Spazio metrico* è un insieme $X$ con una distanza $d$.

Dalla III segue

$$d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y).$$

Scambiando $x$ con $y$ e tenendo conto di II, è anche

$$d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(x, y).$$

Pertanto, per ogni scelta di $x, y, z$ in $X$ si ha

III'. $$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y).$$

*Definizione* 4.2. Sia $\varepsilon > 0$. L'insieme

$$S(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

ossia l'insieme dei punti di $X$ che hanno distanza minore di $\varepsilon$ da $x$, si chiama il *disco* di *centro* $x$ e *raggio* $\varepsilon$.

Ovviamente $x \in S(x, \varepsilon)$; è immediato verificare inoltre che

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} S(x, \varepsilon) = \{x\}.$$

*Lemma* 4.3 *Per ogni punto $y$ di un disco $S(x, \varepsilon)$ esiste un disco di centro $y$ contenuto in $S(x, \varepsilon)$.*

*Dimostrazione*. Poiché $y \in S(x, \varepsilon)$, è $d(x, y) < \varepsilon$. Sia $\sigma$ un numero reale tale che $0 < \sigma < \varepsilon - d(x, y)$. Mostriamo che $S(y, \sigma)$





è contenuto in $S(x, \varepsilon)$. Se $z \in S(y, \sigma)$, si ha, per la relazione triangolare III,

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \sigma < \varepsilon;$$

ne segue che $z \in S(x, \varepsilon)$. Q.E.D.

*Proposizione* 4.4. *La famiglia $\mathfrak{B}$ dei dischi di uno spazio metrico $X$ soddisfa alle condizioni* a), b) *del teorema* 3.2.

*Dimostrazione*. Che valga la a) è evidente. Passiamo alla b); siano $B_1$ e $B_2$ due dischi tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, e sia $x \in B_1 \cap B_2$. Per il lemma precedente esiste un disco di centro $x$ e raggio $\varepsilon_1$ contenuto in $B_1$ ed un disco con lo stesso centro $x$ e raggio $\varepsilon_2$ contenuto in $B_2$. Essendo $\varepsilon$ il piú piccolo tra i due numeri positivi $\varepsilon_1$ ed $\varepsilon_2$, risulta

$$S(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon_1) \cap S(x, \varepsilon_2) \subset B_1 \cap B_2.$$

Q.E.D.

Per il teorema 3.3 la famiglia $\mathfrak{B}$ dei dischi di uno spazio metrico $X$ è una base per una topologia su $X$. Questa topologia è la topologia meno fine tra le topologie in cui i dischi di $X$ sono aperti.

*Definizione* 4.5. Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$. La topologia di $X$ meno fine in cui i dischi di $X$ sono aperti si dice la topologia dello spazio metrico $X$ *indotta* dalla distanza $d$. Uno spazio topologico $X$ si dice *metrizzabile* se esiste su $X$ una distanza che induca su $X$ la topologia assegnata. Due distanze $d$, $d'$ sullo stesso insieme $X$ si dicono *topologicamente equivalenti*, se inducono su $X$ la stessa topologia.

Siano $(X, d)$, $(X', d')$ due spazi metrici.

*Definizione* 4.6. Un'applicazione $f\colon X \to X'$ si dice una *isometria di $X$ in $X'$* se, per ogni scelta di $x, y$ in $X$, risulta

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Due spazi metrici $X$, $X'$ si dicono *isometrici*, se esiste una isometria di $X$ in $X'$ che sia bigettiva.

È immediato constatare che:

a) una isometria di $X$ in $X'$ è un'applicazione iniettiva e continua (rispetto alle topologie indotte dalle rispettive distanze);

b) due spazi metrici isometrici sono omeomorfi (rispetto alle topologie indotte dalle rispettive distanze).

*Esempi*

[4.1] Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$, e sia $Y$ un sottoinsieme (non vuoto) di $X$. La restrizione di $d$ a $Y \times Y$ definisce una distanza su $Y$. I dischi dello spazio metrico $Y$ sono le intersezioni di $Y$ con i dischi dello spazio metrico $X$ di eguale centro e raggio.

[4.2] Sia $X$ un insieme qualunque. Poniamo

$$d(x, y) = 1 \quad \text{se} \quad x \neq y; \quad d(x, x) = 0.$$

La funzione $d$: $X \times X \to \mathbf{R}$ cosí definita è una distanza su $X$. La topologia indotta da $d$ è quella discreta. (I dischi di raggio minore o eguale ad 1 sono costituiti solo dal centro.)

[4.3] Nell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali (od in ogni suo sottoinsieme) la funzione $d$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$d(x, y) = |x - y|$$

è una distanza. La topologia indotta da $d$ è quella della retta reale (esempio 3.3); i dischi dello spazio metrico $\mathbf{R}$ sono gli intervalli (aperti) di $\mathbf{R}$.

Analogamente, sull'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali la distanza $d(x, y) = |x - y|$ induce la topologia della retta razionale.

[4.4] Sia $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ l'insieme delle $n$-ple

$$x = (x_i)_{i=1\ldots n} = (x_1, \ldots, x_n)$$

di numeri reali. La funzione che ad ogni coppia

$$x = (x_i),\ y = (y_i)$$

di punti di $\mathbf{R}^n$ associa il numero reale

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_1^n{}_i (x_i - y_i)^2}$$

è una distanza su $\mathbf{R}^n$ che si dice la *distanza euclidea* di $\mathbf{R}^n$. La topologia indotta da $d$ si dice la *topologia euclidea* di $\mathbf{R}^n$.





Le condizioni I, II e IV sono evidentemente soddisfatte. La relazione triangolare III segue dalla disuguaglianza (che stabiliremo appresso)

$$(1) \qquad \sqrt{\sum_1^n{}_i (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2} + \sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2}.$$

ove si ponga $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ per $i = 1, \ldots, n$.

Basta dunque dimostrare la (1) (che è ovvia se $a_i = 0$, oppure $b_i = 0$, per $i = 1, \ldots, n$). Supponiamo dunque che qualche $a_i$ e qualche $b_i$ siano diversi da zero. Qualunque sia $\lambda > 0$, risulta

$$2\,|a_i b_i| \leqslant \lambda a_i^2 + \frac{1}{\lambda} b_i^2 \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n$$

(che si deduce dalle $\left(\sqrt{\lambda}\, a_i + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_i\right)^2 \geqslant 0$, $\left(\sqrt{\lambda}\, a_i - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_i\right)^2 \geqslant 0$).

Ne segue

$$2\,\Big|\sum_1^n{}_i a_i b_i\Big| \leqslant \lambda \sum_1^n{}_i a_i^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_1^n{}_i b_i^2.$$

I due termini a secondo membro sono eguali per

$$\lambda = \sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2} : \sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2}.$$

Sostituendo questo valore di $\lambda$ si ottiene la

$$\Big|\sum_1^n{}_i a_i b_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2} \quad \text{(disuguaglianza di Schwarz).}$$

Torniamo alla (1). Risulta

$$\sum_1^n{}_i (a_i + b_i)^2 = \sum_1^n{}_i a_i^2 + \sum_1^n{}_i b_i^2 + 2 \sum_1^n{}_i a_i b_i \leqslant \sum_1^n{}_i a_i^2 + \sum_1^n{}_i b_i^2 + 2 \cdot \Big|\sum_1^n{}_i a_i b_i\Big|;$$

tenuto conto della disuguaglianza di Schwarz, ne segue

$$\sum_1^n{}_i(a_i+b_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2} =$$
$$= \left(\sqrt{\sum_1^n{}_i a_i^2} + \sqrt{\sum_1^n{}_i b_i^2}\right)^2$$

che è appunto la (a).

[4.5] In particolare il piano euclideo $\mathbf{R}^2$ è l'insieme delle coppie $x = (x_1, x_2)$ di numeri reali con la distanza

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

e con la topologia indotta da $d$.

[4.6] Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$; allora

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \tag{2}$$

definisce una distanza $d'$ su $X$ che ha le seguenti proprietà:

a) $d$ e $d'$ sono distanze topologicamente equivalenti;
b) $d'$ è limitata ($d'(x, y) \leqslant 1$ per ogni scelta di $x, y$ in $X$).

Per dimostrare la proprietà III (le altre proprietà della distanza sono ovvie), osserviamo che, come si verifica facilmente, per $h > 0$, $h \to \dfrac{h}{1+h}$ è funzione crescente di $h$.

Ciò posto,

$$d'(x, y) + d'(y, z) \geqslant \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \geqslant \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} =$$
$$= d'(x, z).$$

Dunque $d'$ è una distanza su $X$. Per dimostrare che $d$ e $d'$ sono topologicamente equivalenti basta provare che per ogni disco $S(x, \varepsilon)$ rispetto alla distanza $d$, esiste un disco $S'(x, \varepsilon')$ rispetto alla distanza $d'$ contenuto in $S(x, \varepsilon)$, e viceversa. Da $d'(x, y) \leqslant d(x, y)$ segue $S(x, \varepsilon) \subset S'(x, \varepsilon)$; dalla (2) segue $S'(x, \varepsilon') \subset S(x, \varepsilon)$ per $\varepsilon' \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}$





[4.7] Sia $\mathbf{R}$ la retta reale (cioè l'insieme dei numeri reali con la topologia dell'esempio 3.3 e la distanza dell'esempio 4.3) e sia $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita dalla

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Posto $x' = f(x)$, si ha anzitutto

$$|x'| = |f(x)| = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1,$$

e quindi

$$1 - |x'| > 0. \tag{4}$$

Inoltre risulta

$$x = x'(1 + |x|),$$
$$|x| = |x'| \cdot (1 + |x|),$$
$$|x| = \frac{|x'|}{1 - |x'|},$$

onde, tenuto conto di (3) e di (4) ($x$ e $x' = f(x)$ hanno lo stesso segno) si ottiene

$$x = \frac{x'}{1 - |x'|}.$$

Ne discende che $f$ è una bigezione di $\mathbf{R}$ sull'intervallo (aperto) $]-1, 1[$.

Aggiungiamo ad $\mathbf{R}$ due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$, e poniamo

$$\bar{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Sia

$$g\colon \bar{\mathbf{R}} \to [-1, 1]$$

l'applicazione di $\bar{\mathbf{R}}$ nell'intervallo (chiuso) $[-1, 1]$ definita da

$$g(-\infty) = -1, \quad g(x) = f(x) \text{ per } x \in \mathbf{R}, \; g(+\infty) = 1.$$

Si consideri in $[-1, 1]$ la distanza $d'$ definita da $d'(x', y') = |x' - y'|$ (v. esempio 4.1); lasciamo al lettore la cura di dimostrare le affermazioni seguenti, alcune delle quali sono immediate:

1) Siano $x$, $y$ due punti di $\bar{\mathbf{R}}$ e sia $d(x, y) = |g(x) - g(y)|$; la funzione $d$: $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ così definita è una distanza su $\bar{\mathbf{R}}$ tale che:

a) $d(x, y) \leqslant 2$ per ogni $x, y \in \bar{\mathbf{R}}$;
b) $d(x, y) = 2$ se, e soltanto se,

$$x = -\infty, \quad y = +\infty \quad (\text{o } x = +\infty \quad , \quad y = -\infty).$$

2) L'applicazione $g$ è una isometria bigettiva dello spazio metrico $(\bar{\mathbf{R}}, d)$ sullo spazio metrico $([-1, 1], d')$.

3) In $\bar{\mathbf{R}}$ la relazione

$$x \leqslant y \Leftrightarrow g(x) \leqslant g(y)\,,$$

dove $\leqslant$ a destra è la relazione d'ordine naturale in $[-1, 1]$, è la relazione d'ordine totale che ha come primo elemento $-\infty$, come ultimo elemento $+\infty$, e che induce su $\mathbf{R}$ l'ordinamento naturale.

## 5. *Intorni*

Sia $X$ uno spazio topologico, $M$ un sottoinsieme di $X$.

*Definizione* 5.1. Un sottoinsieme $U$ si dice ***intorno*** di $M$, se esiste un aperto $A$ contenuto in $U$ e contenente $M$, ossia se esiste un aperto $A$ tale che:

$$M \subset A \subset U.$$

In particolare:

a) ogni aperto contenente $M$ è un intorno (aperto) di $M$;
b) $M$ è aperto se, e soltanto se, $M$ è intorno di se stesso;
c) se $N \subset M$ ed $U$ è un intorno di $M$, allora $U$ è un intorno di $N$.

*Teorema* 5.2. *Un sottoinsieme $A$ di $X$ è aperto se, e soltanto se, esso è un intorno di ogni suo punto.*

*Dimostrazione*. Da a) segue che se $A$ è aperto, allora $A$ è intorno di ogni suo punto.

Supponiamo inversamente che $A$ sia un intorno di ogni suo punto. Per ogni $x \in A$ esiste un aperto $U_x$ tale che $x \in U_x \subset A$.

Si ha

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

ed $A$, come unione di una famiglia di aperti, è un aperto. Q.E.D.





Sia $\mathfrak{U}(x)$ l'insieme degli intorni del punto $x$ di $X$; dalla definizione 5.1 segue che $\mathfrak{U}(x)$ gode delle seguenti proprietà:

1) Se $U \in \mathfrak{U}(x)$ ed $U \subset V$, allora $V \in \mathfrak{U}(x)$.

Per conseguenza $X \in \mathfrak{U}(x)$ per ogni $x \in X$.

2) *L'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{U}(x)$ appartiene a $\mathfrak{U}(x)$.*

3) *Se $U \in \mathfrak{U}(x)$ allora $x \in U$.*

Vale inoltre la seguente proprietà:

4) *Se $U \in \mathfrak{U}(x)$, esiste un insieme $V \in \mathfrak{U}(x)$ tale che $U \in \mathfrak{U}(y)$ per ogni $y \in V$.*

Infatti se $U$ è un intorno di $x$, esiste un aperto $V$ tale che $x \in V \subset U$. Ne segue che $U$ è intorno di ogni punto $y \in V$.

*Proposizione* 5.3. *Se a ciascun punto $x$ di un insieme $X$ si associa una famiglia $\mathfrak{U}(x)$ di sottoinsiemi di $X$ in guisa che siano soddisfatte le precedenti condizioni* 1), 2), 3) *e* 4), *esiste una topologia ed una sola di $X$ nella quale $\mathfrak{U}(x)$ è la famiglia degli intorni di $x$ per ogni $x \in X$.*

*Dimostrazione*. Se esiste una topologia su $X$ nella quale $\mathfrak{U}(x)$ sia la famiglia degli intorni di $x$, un sottoinsieme $A$ di $X$ è aperto se, e soltanto se, $A \in \mathfrak{U}(x)$ per ogni $x \in A$. Dunque una tale topologia, se esiste, è unica.

Proviamo che essa esiste.

Chiameremo aperto un sottoinsieme $A$ di $X$ se $A \in \mathfrak{U}(x)$ per ogni $x \in A$. Abbiamo già osservato che $X \in \mathfrak{U}(x)$ per ogni $x \in X$, e quindi $X$ è aperto. Ovviamente $\emptyset$ è aperto.

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti. Se $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, esiste un $i_0 \in I$ tale che $x \in A_{i_0}$. Risulta $A_{i_0} \in \mathfrak{U}(x)$, e quindi, per la condizione 1), $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{U}(x)$. Poiché ciò è vero per ogni $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, ne segue che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

Sia $A_1, \ldots, A_n$ una famiglia finita di aperti, e sia

$$x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Si ha che

$$x \in A_i \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n,$$

sicché

$$A_i \in \mathfrak{U}(x) \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n.$$

Pertanto, in virtú della condizione 2),

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{U}(x).$$

Poiché ciò è vero per ogni $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$, quest'ultimo insieme è aperto.

Dunque la famiglia degli aperti sopra definita determina in $X$ una struttura topologica. Dimostreremo ora che in questa topologia gli elementi di $\mathfrak{U}(x)$ sono gli intorni del punto $x$.

Sia $U'$ un intorno di $x$ nella topologia suddetta. Esiste un aperto $V'$ tale che $x \in V' \subset U'$. Poiché $V'$ è aperto, $V' \in \mathfrak{U}(x)$. Pertanto, in virtú della condizione 1), $U' \in \mathfrak{U}(x)$.

Inversamente, sia $U \in \mathfrak{U}(x)$. Proviamo che $U$ è un intorno di $x$ nella topologia suddetta. Sia $V$ l'insieme di tutti gli $z \in X$ tali che $U \in \mathfrak{U}(z)$. In base alla condizione 3) $x \in V \subset U$. Proviamo che $V$ è aperto, ossia che $V \in \mathfrak{U}(y)$ per ogni $y \in V$. Per la condizione 4) esiste un $W_y \in \mathfrak{U}(y)$ tale che $U \in \mathfrak{U}(z)$ per ogni $z \in W_y$. Poiché $V$ è l'insieme di *tutti* i punti $z$ per cui $U \in \mathfrak{U}(z)$, ne segue che $W_y \subset V$. Dunque, per la condizione 1), $V \in \mathfrak{U}(y)$.

Poiché $V$ è aperto, $U$, che contiene $V \ni x$, è un intorno di $x$ nella topologia suddetta. Q.E.D.

*Teorema* 5.4. *Siano $X$ e $X'$ due spazi topologici e sia $f$: $X \to X'$ un'applicazione di $X$ in $X'$. L'applicazione $f$ è continua se, e soltanto se, per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno $U$ di $f(x)$ esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $f(V) \subset U$.*

*Dimostrazione*. Sia $f$ continua. Se $U$ è un intorno di $f(x)$, esiste un aperto $W$ di $X'$ tale che $f(x) \in W \subset U$. L'immagine inversa $V = f^{-1}(W)$ è un aperto di $X$, il quale contiene $x$, e quindi è un intorno di $x$. Risulta $f(V) \subset W \subset U$.

Supponiamo inversamente che per ogni $x \in X$ e per ogni intorno $U$ di $f(x)$ esista un intorno $V$ di $x$ tale che $f(V) \subset U$.

Sia $B$ un aperto di $X'$. Se $f^{-1}(B)$ è vuoto (ossia se $B \cap f(X) = \emptyset$) esso è aperto. Supponiamo che $f^{-1}(B)$ non sia vuoto, e sia $x \in f^{-1}(B)$. Poiché $B$ è aperto, e quindi è intorno di $f(x)$, esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $f(V) \subset B$. Dunque esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $V \subset f^{-1}(B)$. Poiché ciò accade per ogni $x \in f^{-1}(B)$, $f^{-1}(B)$ è un aperto. Q.E.D.

*Definizione* 5.5. L'applicazione $f$: $X \to X'$ dello spazio topologico $X$ nello spazio topologico $X'$ dicesi *continua nel punto* $x \in X$ se, per ogni intorno $U$ di $f(x)$, esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $f(V) \subset U$.





Sia $g$: $X' \to X''$ un'applicazione dello spazio topologico $X'$ nello spazio topologico $X''$. È immediato verificare che se $f$ è continua nel punto $x$ di $X$ e se $g$ è continua nel punto $f(x)$ di $X'$, allora $g \circ f$ è continua in $x$.

In base alla definizione precedente il teorema 5.4 può essere enunciato nella forma seguente:

*Teorema* 5.6. *L'applicazione $f$: $X \to X'$ dello spazio topologico $X$ nello spazio topologico $X'$ è continua se, e soltanto se, $f$ è continua in ogni punto $x$ di $X$.*

*Definizione* 5.7. Dicesi *sistema fondamentale di intorni* di un punto $x$ di uno spazio topologico $X$ un insieme $\mathfrak{A}(x)$ di intorni di $x$ tale che per ogni intorno $U$ di $x$ esista un elemento $V$ di $\mathfrak{A}(x)$ per il quale $V \subset U$. In modo analogo si definisce un sistema fondamentale di intorni di un sottoinsieme $M$ di $X$.

*Proposizione* 5.8. *Una famiglia $\mathfrak{B}$ di aperti di $X$ è una base della topologia di $X$ se, e soltanto se, per ogni punto $x \in X$ l'insieme $\mathfrak{B}_x$ degli aperti $B \in \mathfrak{B}$ i quali contengono $x$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di $x$.*

*Dimostrazione*. Sia $\mathfrak{B}$ una base. Ogni intorno $U$ di $x$ contiene un aperto $V \ni x$. Quindi esiste $B \in \mathfrak{B}_x$ tale che $B \subset U$. Dunque $\mathfrak{B}_x$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di $x$.

Supponiamo inversamente che, per ogni $x \in X$, $\mathfrak{B}_x$ sia un sistema fondamentale di intorni aperti di $x$. Sia $A$ un aperto di $X$. Per ogni $x \in A$ esiste $B \in \mathfrak{B}_x$ tale che $B \subset A$. Dunque $A$ è l'unione degli aperti $B$ al variare di $x$ in $A$. Q.E.D.

In particolare la famiglia degli aperti contenenti $x$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$.

Sia $f$: $X \to X'$ un'applicazione dello spazio topologico $X$ nello spazio topologico $X'$, e siano $\mathfrak{A}(x)$ un sistema fondamentale di intorni di $x \in X$, e $\mathfrak{A}'(f(x))$ un sistema fondamentale di intorni di $f(x)$. È evidente la:

*Proposizione* 5.9. *L'applicazione $f$ è continua nel punto $x \in X$ se, e soltanto se, per ogni $U \in \mathfrak{A}'(f(x))$ esiste $V \in \mathfrak{A}(x)$ tale che $f(V) \subset U$.*

*Esempi*

[5.1] In uno spazio metrico $X$ sono sistemi fondamentali di intorni di $x$:

a) la famiglia dei dischi di centro $x$ e raggio $1/n$ $(n = 1, 2, ...)$;

b) la famiglia dei dischi di centro $x$ e raggio razionale;

c) la famiglia dei dischi chiusi il cui centro ha distanza da $x$ minore del raggio.

[5.2] Se $\mathbf{R}$ ha la topologia che ha per base la famiglia degli intervalli $]-\infty, a[$, la famiglia $\{]-\infty, x+\varepsilon[\}_{\varepsilon>0}$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

[5.3] Se $X$ ha la topologia discreta, la famiglia costituita dal solo punto $x$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$ per ogni $x \in X$.

[5.4] Siano $(X, d)$ e $(X', d')$ due spazi metrici. Un'applicazione $f$: $X \to X'$ è continua rispetto alle topologie indotte dalle distanze se, e soltanto se, per ogni $x \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad y \in X \quad \text{tale che} \quad d(x, y) < \delta.$$

Sia in particolare $X = X' = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea; una funzione $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua se per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ (dipendente in generale da $x$ e da $\varepsilon$) tale che:

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad y \in \mathbf{R} \quad \text{con} \quad | x - y | < \delta.$$

[5.5] Sia $X$ uno spazio topologico, ed $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali con la topologia dell'esempio 5.2. Una funzione a valori reali su $X$ $f$: $X \to \mathbf{R}$ è continua rispetto alle topologie suddette se, per ogni $a \in \mathbf{R}$, il sottoinsieme

$$X_a = \{x \in X \mid f(x) < a\},$$

è un aperto di $X$, ossia se per ogni $x \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $U$ di $x$ tale che

$$f(y) < f(x) + \varepsilon \quad \text{per ogni } y \in U.$$

Una funzione siffatta si dice *semicontinua superiormente* su $X$.

[5.6] L'applicazione $h$ di $\mathbf{R}$ in sé definita da $h(x) = -x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ non è omeomorfismo di $\mathbf{R}$ in sé, quando $\mathbf{R}$ ha la topologia dell'esempio 5.2, ma è un omeomorfismo di $\mathbf{R}$ con la topologia 5.2, sullo stesso $\mathbf{R}$ con la topologia avente per base la famiglia degli intervalli $]a, +\infty[$. Una funzione $f$ a valori reali su uno spazio topologico $X$ la quale sia continua rispetto a quest'ultima topologia (ossia tale che i sottoinsiemi $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ siano aperti per tutti





gli $a \in \mathbf{R}$, si dice *semicontinua inferiormente* su $X$. La funzione $f$ è semicontinua inferiormente se, e soltanto se, $-f$ è semicontinua superiormente.

[5.7] Sia $(X, d)$ uno spazio metrico, e $x_0$ un punto di $X$; la funzione $f$ a valori reali su $X$ definita da $f(x) = d(x, x_0)$ per ogni $x \in X$ è continua, quando $\mathbf{R}$ è la retta reale. (Si tenga conto della III' del paragrafo 4.)

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico, e siano $x$ un punto di $X$, e $F$ un sottoinsieme non vuoto di $X$. Si chiama distanza di $x$ da $F$ il numero reale non negativo

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf.}_{y \in F} d(x, y)$$

(estremo inferiore delle distanze di $x$ dai punti $y$ di $F$).

Se $x \in F$, manifestamente si ha $d(x, F) = 0$; se $F = \{y\}$, allora $d(x, F) = d(x, y)$.

L'esempio 5.7 è un caso particolare della proposizione seguente:

*Proposizione* 5.10. *Sia $F$ un sottoinsieme* (non vuoto) *dello spazio metrico* $(X, d)$. *La funzione $f$ a valori reali su $X$ definita da*

$$f(x) = d(x, F) \text{ per ogni } x \in X$$

*è continua* (*quando* $\mathbf{R}$ *ha la topologia della retta reale*).

*Dimostrazione*. Tenuto conto dell'esempio 5.4 basta dimostrare che

$$| d(x, F) - d(y, F) | \leqslant d(x, y) \text{ per ogni } x, y \in X.$$

Siano $x, y$ due punti di $X$; dalla relazione triangolare III del paragrafo 4 segue che

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \text{ per ogni } z \in F,$$

e quindi

$$d(x, F) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \text{ per ogni } z \in F;$$

ne discende che

$$d(x, F) \leqslant d(x, y) + d(y, F)$$

e quindi

$$d(x, F) - d(y, F) \leqslant d(x, y).$$

Scambiando $x$ con $y$, è anche

$$d(y, F) - d(x, F) \leqslant d(x, y),$$

ciò che prova l'asserto. Q.E.D.

Per ogni punto $x$ di uno spazio topologico $X$ gli elementi di un sistema fondamentale $\mathfrak{A}(x)$ di intorni di $x$ hanno le proprietà seguenti:

a) l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{A}(x)$ contiene un elemento di $\mathfrak{A}(x)$;

b) se $U \in \mathfrak{A}(x)$, allora $x \in U$;

c) se $U \in \mathfrak{A}(x)$, esiste $V \in \mathfrak{A}(x)$ con questa proprietà: per ogni $y \in V$ esiste $W \in \mathfrak{A}(y)$ tale che $W \subset U$.

*Proposizione* 5.11. *Se ad ogni punto $x$ di un insieme $X$ è associata una famiglia $\mathfrak{A}(x)$ di sottoinsiemi di $X$ per la quale valgano le* a), b), c), *esiste una ed una sola topologia su $X$ nella quale $\mathfrak{A}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$.*

*Dimostrazione*. Per ogni $x \in X$ sia $\mathfrak{U}(x)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $X$ che contengono qualche elemento di $\mathfrak{A}(x)$. Dalle a), b), c) segue che $\mathfrak{U}(x)$ soddisfa alle proprietà 1), 2), 3), 4) degli intorni di $x$.

Per la proposizione 5.3, esiste una ed una sola topologia su $X$ nella quale $\mathfrak{U}(x)$ è l'insieme degli intorni di $x$. Per costruzione, $\mathfrak{A}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$ in tale topologia. Ciò prova l'esistenza.

D'altra parte in ogni topologia nella quale $\mathfrak{A}(x)$ sia un sistema fondamentale di intorni di $x$, $\mathfrak{U}(x)$ è l'insieme di tutti gli intorni di $x$. Da ciò segue l'unicità. Q.E.D.

*Esempio*

[5.8] Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali ed $\mathfrak{F} = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ l'insieme delle applicazioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Poniamo

$$\alpha = (\{x_h\}_{h=1,\dots,n},\ \varepsilon)_{n=1,2,\dots}$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono numeri reali tali che $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ed $\varepsilon > 0$; per ogni $f \in \mathfrak{F}$ indichiamo con $U_f^\alpha$ l'insieme degli elementi $g$ di $\mathfrak{F}$ tali che

$$|f(x_h) - g(x_h)| < \varepsilon \text{ per } h = 1, 2, \dots, n$$





e con $\mathfrak{A}(f)$ la famiglia dei sottoinsiemi $U_f^\alpha$ di $\mathfrak{F}$ per ogni scelta del sistema $\alpha$.

Gli $\mathfrak{A}(f)$ hanno le proprietà a), b), c) dei sistemi fondamentali di intorni e quindi definiscono su $\mathfrak{F}$ una topologia a norma della proposizione 5.11.

*Definizione* 5.12. Una famiglia $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico $X$ dicesi *localmente finita* se ogni punto $x \in X$ ha un intorno $U$ tale che $U \cap V_i = \emptyset$ salvo al piú un numero finito di indici $i$, ossia per il quale è finito l'insieme degli indici $i$ tali che $U \cap V_i \neq \emptyset$.

*Esempi*

[5.9] Una famiglia finita è localmente finita.

[5.10] Sulla retta reale $\mathbf{R}$ la famiglia di intervalli chiusi

$$\mathfrak{V} = \left\{\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right\}_{n \in \mathbf{N}^*}$$

non è localmente finita (ogni intorno dello zero interseca infiniti elementi di $\mathfrak{V}$), mentre la famiglia

$$\mathfrak{V}' = \{[m, m+2]\}_{m \in \mathbf{Z}}$$

è localmente finita.

*Proposizione* 5.13. *L'unione di una famiglia localmente finita di chiusi di uno spazio topologico $X$ è un insieme chiuso.*

*Dimostrazione*. Sia $\{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi $F_i$ di $X$. Proviamo che $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ è chiuso, ossia che $\complement F$ è aperto. Arriveremo a tale conclusione mostrando che ogni $x \in \complement F$ ha un intorno $U \subset \complement F$.

Per ipotesi esiste un intorno $U'$ di $x$ ed un sottoinsieme *finito* $J \subset I$ tale che

$$U' \cap F_i = \emptyset \text{ per ogni } i \notin J.$$

D'altra parte $U_i = \complement F_i$ è aperto, contiene $x$ ed è contenuto in $\complement F$, per ogni $i \in J$.

L'intersezione finita

$$U = \left(\bigcap_{i \in J} U_i\right) \cap U'$$

è un intorno di $x$ contenuto in $\complement F$. Q.E.D.

Ad esempio l'unione della famiglia $\mathfrak{B}$ di chiusi dell'esempio 5.10, che non è localmente finita, è l'intervallo aperto $]0, +\infty[$ della retta reale **R**, che non è chiuso (il suo complementare non è aperto, perché non è intorno dello zero).

## 6. *Chiusura, derivato di un insieme*

Sia $X$ uno spazio topologico, $A$ un sottoinsieme di $X$.

*Definizione* 6.1. *Un punto* $x$ di $X$ *si dice* ***aderente*** ad $A$ se $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni intorno $U$ di $x$.

*Osservazione.* $x$ è aderente ad $A$ se, e soltanto se, ogni elemento di un sistema fondamentale di intorni di $x$ interseca $A$. In particolare $x$ è aderente ad $A$ se, e soltanto se, ogni aperto contenente $x$ interseca $A$.

*Definizione* 6.2. Si chiama *chiusura* di $A$, e si indica con $\bar{A}$, l'intersezione di tutti i chiusi che contengono $A$.

Dalla definizione 6.2 segue subito che

$$A \subset \bar{A}. \tag{1}$$

La relazione tra i concetti di chiusura e punti di aderenza è espressa nel:

*Teorema* 6.3. *La chiusura* $\bar{A}$ *di* $A$ *è l'insieme dei punti di* $X$ *aderenti ad* $A$.

*Dimostrazione.* Faremo vedere che, se $x$ non è aderente ad $A$, $x \notin \bar{A}$, e, inversamente, se $x \notin \bar{A}$, $x$ non è aderente ad $A$. Se $x$ non è aderente ad $A$, esiste un aperto $U$ che contiene $x$ e non interseca $A$; pertanto $D = \complement U$ è un chiuso che contiene $A$ e quindi $\bar{A}$, ma non contiene $x$. Dunque $x \notin \bar{A}$.

Se $x \notin \bar{A}$, esiste un chiuso $D$ contenente $A$ e non contenente $x$. Pertanto $U = \complement D$ è un aperto contenente $x$ e disgiunto da $A$. Dunque $x$ non è aderente ad $A$. Q.E.D.

*Proposizione* 6.4. *Un sottoinsieme* $A$ *dello spazio topologico* $X$ *è chiuso se, e soltanto se,* $\bar{A} = A$.

*Dimostrazione.* $\bar{A}$ è chiuso, perché intersezione di una famiglia





di chiusi. Pertanto se $A = \bar{A}$, $A$ è chiuso. Viceversa, se $A$ è chiuso, $A \supset \bar{A}$ perché $A$ è uno dei chiusi la cui intersezione è $\bar{A}$; tenuto conto della (1), segue che $\bar{A} = A$. Q.E.D.

Siccome l'insieme vuoto $\emptyset$ ed $\bar{A}$ sono chiusi, risulta in particolare che

$$\bar{\emptyset} = \emptyset \tag{2}$$

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}. \tag{3}$$

Da $A \subset B$ segue che $\bar{A} \subset \bar{B}$: infatti $\bar{B}$ è un chiuso contenente $B$ e quindi $A$; pertanto $\bar{A} \subset \bar{B}$. Possiamo ora dimostrare che, se $A$ e $B$ sono sottoinsiemi di $X$,

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{4}$$

Infatti $A \subset A \cup B$ e quindi $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. Poiché è anche $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, si ha intanto $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Viceversa $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ perché da $A \subset \bar{A}$, e $B \subset \bar{B}$ segue $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ che è chiuso.

Le proprietà (1), (2), (3), (4) caratterizzano la chiusura nel senso precisato dal:

*Teorema* 6.5. *Per ogni sottoinsieme* $A$ *di un insieme* $X$, *sia dato un sottoinsieme* $\bar{A}$, *in guisa tale che siano soddisfatte le proprietà* (1), (2), (3), (4). *Esiste una ed una sola topologia di* $X$ *nella quale* $\bar{A}$ *è la chiusura di* $A$.

*Dimostrazione.* Per ogni topologia nella quale $\bar{A}$ sia la chiusura di $A$, un sottoinsieme $F$ di $X$ è chiuso se, e soltanto se, $\bar{F} = F$. Quindi due topologie siffatte hanno in comune tutti i chiusi, e pertanto coincidono. Ciò prova l'unicità.

Passando a provare l'esistenza, diremo che un sottoinsieme $F \subset X$ è chiuso se, e soltanto se, $\bar{F} = F$.

In virtú della (2) l'insieme vuoto è chiuso.

Dalla (1) si trae che $X$ è chiuso. Dalla (4) si ha inoltre che l'unione di una famiglia finita di chiusi è chiusa.

Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di $X$; si ha $A \subset B$ se, e solo se, $B = A \cup B$; ne segue, per la (4), che $\bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, cioè $\bar{A} \subset \bar{B}$. Dunque da $A \subset B$ discende che $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Sia data ora una famiglia $\{F_i\}_{i \in I}$ di insiemi chiusi di $X$, e sia

$$D = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Risulta $D \subset F_i$, e quindi $\bar{D} \subset \bar{F}_i = F_i$. Poiché ciò accade per ogni $i \in I$, si ha

$$\bar{D} \subset D.$$

Avendosi anche $D \subset \bar{D}$ (per la (1)), si conclude che $D = \bar{D}$, ossia che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi è chiusa.

Dunque i sottoinsiemi $F$ di $X$ tali che $\bar{F} = F$ sono i chiusi di una topologia su $X$.

Resta da provare che $\bar{A}$ è la chiusura di $A$ in tale topologia. Infatti, se $F$ è un qualsiasi insieme chiuso contenente $A$, risulta

$$\bar{A} \subset F.$$

D'altra parte, per la (3), $\bar{A}$ è chiuso. Dunque $\bar{A}$ è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti $A$, ossia è la chiusura di $A$. Q.E.D.

*Esempi*

[6.1] $X$ ha la topologia indiscreta se, e soltanto se, $\bar{A} = X$ per ogni sottoinsieme non vuoto $A$ di $X$.

[6.2] $X$ ha la topologia discreta se, e soltanto se, $\bar{A} = A$ per ogni sottoinsieme $A$ di $X$.

[6.3] Se $X$ è un insieme infinito con la topologia dell'esempio 1.3, la chiusura di ogni sottoinsieme non chiuso è $X$.

[6.4] Sia **R** l'insieme dei numeri reali con la topologia che ha per base gli intervalli $]-\infty, a[$; per ogni sottoinsieme $A$ di **R** si ha:

$\bar{A} = [\text{Inf. } A, +\infty[$ se $A$ è inferiormente limitato;
$\bar{A} = \mathbf{R}$, se $A$ è inferiormente illimitato.

[6.5] In uno spazio metrico $(X, d)$ la chiusura $\bar{A}$ di un sottoinsieme $A$ di $X$ è data dalla

$$\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$

In particolare un sottoinsieme $F$ di $X$ è chiuso se (e soltanto se) da $d(x, F) = 0$ segue $x \in F$.

Sia $X$ uno spazio topologico ed $A$ un sottoinsieme di $X$. Tra i punti aderenti ad $A$ hanno particolare interesse i punti, ogni intorno dei quali interseca $A$ in almeno un punto diverso da $x$ ed i punti $x$ (di $A$) per i quali esiste un intorno la cui intersezione con $A$ è $\{x\}$. Porremo la definizione seguente:





*Definizione* 6.6. Sia $A$ un sottoinsieme di $X$; un punto $x$ di $X$ si dice *punto di accumulazione* (o *punto limite*) di $A$ se ogni intorno di $x$ contiene almeno un punto di $A$, diverso da $x$. Un punto $x$ di $A$ si dice *isolato* (in $A$) se esiste un intorno di $x$ la cui intersezione con $A$ sia $\{x\}$.

L'insieme dei punti di accumulazione di $A$ si chiama il *derivato* di $A$ e si indica con $D(A)$. Indichiamo altresí con $A^*$ l'insieme dei punti isolati di $A$.

Sono immediate le relazioni seguenti:

(a) $$A \cup D(A) = A^* \cup D(A) = \bar{A}$$

(b) $$A^* \cap D(A) = \emptyset.$$

Di qui segue subito che i sottoinsiemi chiusi e privi di punti isolati sono quelli che coincidono con il loro derivato. Questi sottoinsiemi si dicono *perfetti*; in particolare uno spazio topologico $X$ è perfetto se ogni suo punto è punto di accumulazione.

*Esempio*

[6.6] La retta reale **R** è uno spazio topologico perfetto. La retta razionale **Q** è perfetta, mentre l'insieme **Q** dei razionali non è perfetto nella retta reale **R**.

Sia $f\colon X \to X'$ un'applicazione di uno spazio topologico $X$ in uno spazio topologico $X'$, ed $A$ un sottoinsieme di $X$.

*Lemma* 6.7. *Se $f$ è continua in un punto $x$, ed $x$ è un punto aderente ad $A$, allora $f(x)$ è aderente a $f(A)$.*

*Dimostrazione*. Sia $U$ un qualsiasi intorno di $f(x)$. Poiché $f$ è continua in $x$, esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $f(V) \subset U$. Siccome $x$ è aderente ad $A$, $V \cap A \neq \emptyset$. Per conseguenza

$$U \cap f(A) \supset f(V) \cap f(A) \supset f(V \cap A) \neq \emptyset.$$

Q.E.D.

*Proposizione* 6.8. *L'applicazione $f$ è continua se, e soltanto se, per ogni sottoinsieme $A \subset X$, risulta $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

*Dimostrazione*. Se $f$ è continua, risulta $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ per il lemma precedente. Supponiamo inversamente che valga l'inclusione

(c) $$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

per ogni $A \subset X$. Per dimostrare che $f$ è continua basta provare che l'immagine inversa di ogni chiuso $F$ di $X'$ è chiusa in $X$.

Sia infatti $x \in \overline{f^{-1}(F)}$. Dalla (c) segue

$$f(x) \in \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{f(X) \cap F} \subset \bar{F} = F$$

e quindi

$$x \in f^{-1}(F);$$

pertanto

$$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F),$$

cioè $f^{-1}(F)$ è chiuso. Q.E.D.

*Definizione* 6.9. Un sottoinsieme $D$ di uno spazio topologico $X$ dicesi *denso* in $X$ se $\bar{D} = X$.

*Proposizione* 6.10. *$D$ è denso in $X$ se, e soltanto se, per ogni aperto non vuoto $A$ di $X$, $A \cap D \neq \emptyset$.*

*Dimostrazione*. Sia $D$ denso in $X$ e sia $A$ un aperto non vuoto di $X$. Poiché $A$ è aperto, $A$ è un intorno di ogni suo punto $x$.

Essendo $x$ aderente a $D$, $A \cap D \neq \emptyset$.

Supponiamo che ogni aperto non vuoto di $X$ sia non disgiunto da $D$, e sia $x$ un qualsiasi punto di $X$. Se $U$ è un intorno di $x$, esiste un aperto $A$ tale che $x \in A \subset U$. Poiché $A \cap D \neq \emptyset$, $x$ è aderente a $D$. Dunque $D$ è denso in $X$. Q.E.D.

*Esempio*

[6.7] Sia **R** la retta reale. L'insieme **Q** dei razionali e il suo complementare $\complement$**Q** sono entrambi densi in **R**.

## 7. *Parte interna e frontiera di un insieme*

Sia $X$ uno spazio topologico, ed $A$ un sottoinsieme di $X$. Ricordiamo che la chiusura $\bar{A}$ di $A$ è definita dalla

$$\bar{A} = \bigcap_i F_i \quad \text{con } F_i \text{ chiuso, } F_i \supset A.$$

Sia $S = \complement A$; ad ogni $F_i$ chiuso, tale che $F_i \supset A$ corrisponde biunivocamente $U_i = \complement F_i$ aperto, tale che $U_i \subset S = \complement A$.





Inoltre risulta

$$\complement\overline{\complement S} = \complement\bar{A} = \complement(\bigcap_i F_i) = \bigcup_i(\complement F_i) = \bigcup_i U_i \quad \text{con } U_i \text{ aperto, } U_i \subset S.$$

Poniamo la

*Definizione* 7.1. Sia $S$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$. Si dice *parte interna* di $S$ il sottoinsieme $\mathring{S}$ di $S$, unione di tutti gli aperti contenuti in $S$.

Da quanto precede risulta che

*Proposizione* 7.2.

(a) $$\mathring{S} = \complement\overline{\complement S}.$$

Alle proprietà che caratterizzano la chiusura fanno riscontro le proprietà seguenti della parte interna

(1′) $$\mathring{S} \subset S.$$

*Proposizione* 7.3. *Un sottoinsieme $S$ dello spazio topologico $X$ è aperto se, e solo se, $\mathring{S} = S$.*

(2′) $$\mathring{X} = X$$

(3′) $$\mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$$

(4′) $$\overset{\circ}{\overbrace{S \cap T}} = \mathring{S} \cap \mathring{T}$$

Esse possono essere dimostrate direttamente, facendo riferimento alla definizione 7.1, con ragionamenti analoghi a quelli fatti per dimostrare le proprietà corrispondenti della chiusura (si tratta semplicemente di sostituire unione con intersezione, chiuso con aperto, contenente con contenuto e viceversa). Le stesse proprietà possono essere dimostrate anche a partire dalla proporzione 7.2, facendo ricorso alle proprietà corrispondenti della chiusura.

Svilupperemo, parallelamente, come utile esercizio, i due modi di ragionare.

Per la (1′) la dimostrazione diretta è ovvia.

Partendo invece dalla proposizione 7.2, si ha:

$$\mathring{S} = \complement\overline{\complement S} \subset S \Leftrightarrow \overline{\complement S} \subset \complement S,$$

che è la (1) della chiusura (quando $A = \complement S$).

Dimostriamo ora la proposizione 7.3.

Direttamente: $\mathring{S}$ è aperto (come unione di aperti); quindi $S$ è aperto, se $S = \mathring{S}$; viceversa se $S$ è aperto, allora $S \subset \mathring{S}$ e quindi, per (1′), la 7.3.

Partendo dalla proposizione 7.2: $S$ è aperto $\Leftrightarrow \complement S$ è chiuso, cioè

$$S \text{ aperto} \Leftrightarrow \complement S = \overline{\complement S} \Leftrightarrow S = \complement\overline{\complement S} = \mathring{S}.$$

La (2′) è immediata in entrambi i modi di ragionare.

Proviamo la (3′). Direttamente: $\mathring{S}$ è aperto, e quindi, per la 7.3, $\mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$.

Partendo dalla proposizione 7.2:

$$\mathring{\mathring{S}} = \complement\overline{\complement\mathring{S}} = \complement\overline{\complement(\complement\overline{\complement S})} = \complement\overline{\overline{\complement S}} = \complement\overline{\complement S} = \mathring{S}.$$

Stabiliamo infine la (4′).

Direttamente: $\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} \supset \mathring{S} \cap \mathring{T}$, perché $\mathring{S} \cap \mathring{T}$ è un aperto, che, per (1′), è contenuto in $S \cap T$. Inoltre $\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} \subset \mathring{S} \cap \mathring{T}$, perché $\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}}$ è un aperto contenuto in $S \cap T$ e quindi in $S$; dunque $\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} \subset \mathring{S}$, ed analogamente $\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} \subset \mathring{T}$.

Partendo dalla proposizione 7.2:

$$\overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} = \complement\overline{\complement(S \cap T)} = \complement\overline{\complement S \cup \complement T} = \complement[\overline{\complement S} \cup \overline{\complement T}] =$$
$$= \complement\overline{\complement S} \cap \complement\overline{\complement T} = \mathring{S} \cap \mathring{T}.$$

Le proprietà (1′), (2′), (3′), (4′) caratterizzano le parti interne, nel senso precisato dal seguente:

*Teorema* 7.4. *Per ogni sottoinsieme $S$ di un insieme $X$, sia dato un sottoinsieme $\mathring{S}$ in guisa tale che siano soddisfatte le proprietà* (1′), (2′), (3′), (4′). *Esiste una ed una sola topologia su $X$ nella quale $\mathring{S}$ è la parte interna di $S$.*

*Dimostrazione.* Se in una topologia la parte interna di $S$ è $\mathring{S}$, allora la chiusura di $A = \complement S$ deve essere data, per la proposizione 7.2,





dalla

$$\text{(b)} \qquad \bar{A} = \overline{\complement S} = \complement\mathring{S} = \complement\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$$

e quindi devono essere soddisfatte per $\bar{A}$ le proprietà (1), (2), (3), (4) del teorema 6.5.

È immediato verificare che $\bar{A}$ ha le proprietà suddette. Infatti:

(1) $A \subset \bar{A}$ perché $\complement\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}} \subset \complement A$;

(2) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ perché $\complement\bar{\emptyset} = \overset{\circ}{\widehat{\complement\emptyset}} = \mathring{X} = X$;

(3) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ perché $\bar{\bar{A}} = \complement\overset{\circ}{\widehat{\complement\bar{A}}} = \complement\overset{\circ\circ}{\widehat{\complement A}} = \complement\overset{\circ}{\widehat{\complement A}} = \bar{A}$;

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ perché $\overline{A \cup B} = \complement\overset{\circ}{\widehat{\complement(A \cup B)}} =$
$= (\complement\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}) \cup (\complement\overset{\circ}{\widehat{\complement B}}) = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Per il teorema 6.5 è unica la topologia su $X$ la cui chiusura è data dalla (b). Resta da verificare che in questa topologia la parte interna di un sottoinsieme $S$ è proprio $\mathring{S}$; ed infatti per la proposizione 7.2

$$\text{parte interna di } S = \complement\overline{\complement S} = \complement\complement\mathring{S} = \mathring{S}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Sia $A$ un sottoinsieme di $X$. Osserviamo che $U$ è un intorno di $A$ se, e soltanto se, $A \subset \mathring{U}$.

*Definizione* 7.5. I punti di $\mathring{S}$ diconsi ***interni*** a $S$.

*Proposizione* 7.6. *Un punto $x$ è interno ad $S$ se, e soltanto se, esiste un intorno $U$ di $x$ contenuto in $S$.*

*Dimostrazione.* Se $x$ è un punto interno a $S$, $x$ appartiene a $\mathring{S} \subset S$, il quale, essendo aperto, è intorno di ogni suo punto.

Se esiste un intorno $U$ di $x$ contenuto in $S$, esiste un intorno aperto $A$ di $x$ tale che $A \subset U \subset S$.

Siccome $\mathring{S}$ è l'unione degli aperti contenuti in $S$, risulta $A \subset \mathring{S}$. Si avrà anche $x \in \mathring{S}$. Q.E.D.

*Definizione* 7.7. In uno spazio topologico $X$ un punto $x$ dicesi punto *frontiera* di un insieme $A$, se $x$ è aderente ad $A$ e a $\complement A$. L'insieme dei punti di frontiera di $A$ dicesi la *frontiera* di $A$, e si indica con $F(A)$.

Pertanto
$$F(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A},$$
ed è chiusa. Ne segue, per (a),
$$\complement F(A) = \complement \bar{A} \cup \complement \overline{\complement A} = \mathring{A} \cup \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}.$$

Ad esempio in $\mathbf{R}^n$ la chiusura di un disco $S(x_0, \varepsilon)$ è l'insieme
$$\overline{S(x_0, \varepsilon)} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x_0, x) \leqslant \varepsilon\}$$
mentre la frontiera di $S(x_0, \varepsilon)$ è l'insieme
$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x_0, x) = \varepsilon\}.$$

Invece in un insieme $X$, con la distanza dell'esempio 4.2 e quindi con la topologia discreta, si ha
$$\overline{S(x_0, 1)} = \{x_0\}, \quad \{x \in X \mid d(x_0, x) \leqslant 1\} = X,$$
$$\{x \in X \mid d(x_0, x) = 1\} = X - \{x_0\}.$$

## *Esercizi*

1. In un insieme costituito da un solo elemento esiste una sola topologia (topologia del punto).

2. La topologia di uno spazio $X$ è quella discreta se, e solo se, ogni punto di $X$ è aperto.

3. Se $X$ è infinito ed ha la topologia [1.3], oppure se $X$ è ordinato ed ha la topologia [1.4], due aperti non vuoti di $X$ hanno sempre intersezione non vuota.

4. In uno spazio topologico $X$ sono fatti equivalenti:
a) l'intersezione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto;





b) l'unione di una famiglia qualunque di chiusi è un chiuso;
c) la famiglia dei chiusi è la famiglia degli aperti di un'altra topologia su $X$.

5. In un insieme $X$ con la topologia [1.3] son fatti equivalenti:
a) $X$ è finito;
b) l'unione di una famiglia qualunque di chiusi è un chiuso;
c) la topologia [1.3] è quella discreta.

6. Nell'insieme ordinato $\mathbf{N}$ dei numeri naturali la topologia $\tau_1$ definita in [1.3] e la topologia $\tau_2$ definita in [1.4] non sono confrontabili, ossia non è vero che $\tau_1 \subset \tau_2$ e nemmeno che $\tau_2 \subset \tau_1$. ($\{0\}$ è chiuso in $\tau_1$ e non è chiuso in $\tau_2$; $\{n \in \mathbf{N} \mid n > 0\}$ è chiuso in $\tau_2$ e non è chiuso in $\tau_1$.)

7. Se $\tau_1$ e $\tau_2$ sono due topologie sullo stesso insieme $X$, la famiglia $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$ dei sottoinsiemi di $X$ che sono aperti sia in $\tau_1$ sia in $\tau_2$, è una topologia su $X$; precisamente $\tau$ è la topologia piú fine tra le topologie che sono meno fini sia di $\tau_1$ che di $\tau_2$.

8. Siano $X$ e $X'$ due insiemi totalmente ordinati, con la topologia [1.4]. Un'applicazione $f\colon X \to X'$ è un omeomorfismo se, e soltanto se, $f$ è surgettiva e crescente (da $x < y$ segue $f(x) < f(y)$). (Un'applicazione crescente è iniettiva. Sia $f$ continua ed $x < y$; se $A = \{t \in X';\ t \leqslant f(y)\}$, allora $f^{-1}(A)$ è un aperto di $X$ contenente $y$ e quindi $x$. Pertanto $f(x) \in A$, ossia $f(x) < f(y)$.)

9. Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali e, per $a \in \mathbf{R}$, poniamo $]-\infty, a[\ = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$. La famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ costituita da $\emptyset$, $\mathbf{R}$ e dai sottoinsiemi $]-\infty, a[$ per $a \in \mathbf{R}$, è una topologia su $\mathbf{R}$ strettamente meno fine della topologia [1.4].
(Gli aperti della topologia [1.4] sono, oltre $\emptyset$ ed $\mathbf{R}$, i sottoinsiemi $]-\infty, a[$ oppure i sottoinsiemi $]-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R};\ x \leqslant a\}$.)

10. Sia $\mathbf{R}_1$ l'insieme dei numeri reali con la topologia $\tau_1$ definita nell'esercizio 9, e $\mathbf{R}_2$ lo stesso insieme con la topologia $\tau_2$ dell'esempio [1.3]. Un'applicazione $f\colon \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$ è continua se, e soltanto se, è costante. (I punti sono chiusi in $\mathbf{R}_2$; pertanto, se $a \in f(\mathbf{R}_1)$, $f^{-1}(a) = [m, +\infty[\ = \{x \in \mathbf{R}_1;\ x \geqslant m\}$. Sia $b \in f(\mathbf{R}_1)$, $f^{-1}(b) = [n, +\infty[$; se $z = \max(m, n)$, risulta $f(z) = a \neq b$.)

11. La relazione tra spazi topologici "$X$ è omeomorfo ad $Y$" è una relazione di equivalenza, ossia: a) $X$ è omeomorfo a se stesso; b) se $X$ è omeomorfo ad $Y$, allora $Y$ è omeomorfo ad $X$; c) se $X$ è omeomorfo ad $Y$ ed $Y$ è omeomorfo a $Z$, allora $X$ è omeomorfo a $Z$. (L'identità su $X$ è un omeomorfismo, l'applicazione inversa di un omeomorfismo è un omeomorfismo, il prodotto di due omeomorfismi è un omeomorfismo.)

12. Sull'insieme **R** dei numeri reali, la famiglia $\mathfrak{B} = \{]-\infty, a]\}$ è una base della topologia [1.4].

13. Sull'insieme **R** dei numeri reali la famiglia degli intervalli (aperti) con estremi razionali è una base della retta reale.

14. Ogni base della topologia discreta contiene come elementi i punti dell'insieme.

15. Sia $\tau_1$ la topologia su **R** definita nell'esercizio 9, e $\tau_2$ la topologia definita in modo analogo a partire dall'ordinamento opposto. La topologia meno fine tra le topologie che sono piú fini di $\tau_1$ e di $\tau_2$ è la topologia della retta reale.

16. La famiglia degli intervalli (semichiusi a sinistra)

$$[a, b[ = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

è una base di una topologia su **R** strettamente meno fine della topologia discreta e strettamente piú fine della topologia della retta reale.

17. $X$ è uno spazio topologico, $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento dell'insieme $X'$, $\tau$ è la topologia su $X'$ generata da $\mathfrak{U}$. Un'applicazione $f$: $X \to X'$ è continua se, e soltanto se, per ogni $U \in \mathfrak{U}$, $f^{-1}(U)$ è un aperto di $X$.

18. Sia $X$ un insieme e $d$: $X \times X \to \mathbf{R}$ sia tale che:

a) $d(x, z) \leqslant d(y, x) + d(y, z)$;
b) $d(x, y) = 0$ se, e soltanto se, $x = y$,

per ogni scelta di $x, y, z$ in $X$. Allora $d$ è una distanza su $X$. (La a) è la proprietà III e la b) è la proprietà IV del paragrafo 4. La I segue da b) per $z = x$, tenuto conto di b); la II segue da a) quando si prenda $z = y$ e quindi si scambi $x$ con $y$.)

19. Sia $X$ uno spazio metrico ed $M$ un insieme di numeri reali maggiori di zero, il cui estremo inferiore sia zero (ad esempio $M$ è l'insieme dei razionali maggiori di zero, oppure è la successione 1, 1/2, ..., 1/n, ...). La famiglia dei dischi di $X$ che hanno centro qualunque e raggio appartenente ad $M$ è una base della topologia indotta su $X$ dalla distanza. (Segue dal lemma 4.3 quando si prenda $\sigma \in M$.)

20. In uno spazio metrico $X$ con distanza $d$ i sottoinsiemi

$$C(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

(disco chiuso di centro $x$ e raggio $\varepsilon$) sono chiusi nella topologia indotta dalla distanza. (Basta dimostrare che $\complement C(x, \varepsilon)$ è aperto, ossia che se $z \notin C(x, \varepsilon)$ esiste $S(z, \varrho)$ che non interseca $C(x, \varepsilon)$; si prenda $\varrho$ tale che $0 < \varrho < d(x, z) - \varepsilon$ e si tenga conto della disuguaglianza triangolare.)





21. Nell'insieme $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$d'(x, y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$$

definisce una distanza topologicamente equivalente alla distanza euclidea $d$. (Da

$$|x_i - z_i| \leqslant |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

segue

$$|x_i - z_i| \leqslant d'(x, y) + d'(y, z);$$

di qui segue la relazione triangolare; le altre proprietà della distanza sono ovvie. L'equivalenza topologica con $d$ si prova osservando che

$$d'(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant 2d'(x, y)$$

e ragionando come nell'esempio 4.6.)

22. Nell'insieme **Z** degli interi relativi la distanza euclidea $|x - y|$ induce la topologia discreta.

23. Sia $p$ un numero primo; per ogni intero relativo $x \neq 0$ sia $\nu(x)$ l'esponente cui compare $p$ nella decomposizione di $x$ in fattori primi (ossia sia $x = h \cdot p^{\nu(x)}$ con $h$ non divisibile per $p$).

(a) $$d(x, y) = \frac{1}{p^{\nu(x-y)}} \quad \text{se} \quad x \neq y; \; d(x, x) = 0$$

definisce una distanza sull'insieme **Z** degli interi relativi che soddisfa alla relazione triangolare nella forma piú restrittiva

(b) $$d(x, z) \leqslant \max\,(d(x, y), d(y, z)).$$

(Se $x - y = h' \cdot p^{n'}$, $y - z = h'' \cdot p^{n''}$ ed $x - z = h \cdot p^n$ con $h$, $h'$, $h''$, non divisibili per $p$, risulta $n \geqslant \min\,(n', n'')$ da cui segue (b).)

24. Determinare le isometrie di **R** in sé munito della distanza euclidea. (Se $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una isometria ed $a = f(0)$, deve essere $|f(x) - a| = |x|$ e quindi $f(x) = x + a$ oppure $f(x) = -x + a$, non potendosi per una stessa $f$ verificare entrambi i casi.)

25. Siano $f$: $X \to \mathbf{R}$, $g$: $X \to \mathbf{R}$ due applicazioni continue di uno spazio topologico $X$ nella retta reale, ed $a$ un numero reale. Le applicazioni di $X$ in **R**:

$$\left.\begin{array}{ll} f + g \text{ definita da} & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ a \cdot f \text{ definita da} & (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \end{array}\right\} \text{ per ogni } x \in X$$

sono applicazioni continue. (Si tenga presente il teorema 5.4 e si osservi che

$$|(f+g)(y)-(f+g)(x)| \leqslant |f(y)-f(x)| + |g(y)-g(x)|;$$
$$|(a\cdot f)(y)-(a\cdot f)(x)| = |a|\cdot|f(y)-f(x)|.)$$

26. Sia $f$ un'applicazione continua dello spazio topologico $X$ nella retta reale. Se $f(x) \neq 0$, esiste un intorno $U$ di $x$ tale che $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in U$.

27. Per ogni punto $x$ di uno spazio metrico $X$ gli intorni chiusi di $x$ formano un sistema fondamentale di intorni di $x$ (v. esempio 5.1).

Se $X$ è infinito ed ha la topologia dell'esempio 1.3, gli intorni chiusi di ogni punto $x$ di $X$ non formano un sistema fondamentale.

28. Se $\mathbf{R}$ ha la topologia dell'esempio 1.2, ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni costituito da un solo elemento.

29. Siano $x_0$, $x_1$ due punti dello spazio metrico $X$ munito di una distanza $d$, ed $a$ un numero reale. I sottoinsiemi di $X$

$$A = \{x \in X \mid d(x, x_0) + d(x, x_1) < a\}$$
$$B = \{x \in X \mid d(x, x_0) + d(x, x_1) \leqslant a\}$$

sono, rispettivamente, un aperto ed un chiuso di $X$ e coincidono coll'insieme vuoto se $a < d(x_0, x_1)$.

30. Sia $F$ un sottoinsieme (non vuoto) dello spazio metrico $(X, d)$. Il sottoinsieme $M$ dei punti $x$ di $X$ per i quali $d(x, F) = 0$ è chiuso (nella topologia indotta da $d$); (0 è chiuso in $\mathbf{R}$; l'asserto segue dalla proposizione 5.10).

31. Sulla retta reale $\mathbf{R}$ si consideri per ogni intero relativo $m$ il sottoinsieme $F_m = [m, m+2]$. Un sottoinsieme $F$ di $\mathbf{R}$ è chiuso se e soltanto se $F \cap F_m$ è chiuso per ogni intero relativo $m$ (v. l'esempio 5.10).

32. Sia $X$ un insieme infinito con la topologia dell'esempio 1.3. Ogni famiglia localmente finita di chiusi è necessariamente finita.

33. In uno spazio topologico qualunque sono fatti equivalenti:

a) l'intersezione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto;
b) l'unione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso;
c) per ogni sottoinsieme $A$ di $X$, si ha $\bar{A} = \bigcup_{x\in A} \bar{x}$.

34. Siano $A$ e $B$ sottoinsiemi di uno spazio topologico $X$. Dimostrare che:

a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
b) se $A$ è aperto, allora $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.





35. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi dello spazio topologico $X$. Dimostrare che

$$\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

36. Se un sottoinsieme $A$ di uno spazio topologico $X$ non ha punti isolati, allora anche $\bar{A}$ non ha punti isolati.

37. Se $f\colon X \to Y$ è un'applicazione continua e surgettiva e $D$ è denso in $X$, allora $f(D)$ è denso in $Y$.

38. Se $D$ è un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$, tale che $D$ e il suo complementare $\complement D$ sono densi in $X$, allora $X$ non possiede punti isolati.

39. Se $A$ è aperto e $B$ è denso in $X$, allora $\bar{A} = \overline{A \cap B}$ (tenere presente l'esercizio 34).

40. Se $A$ è un sottoinsieme di uno spazio metrico $X$, allora il derivato $D(A)$ di $A$ è chiuso.

41. $A$, $B$ sono sottoinsiemi dello spazio topologico $X$, $D(A)$ e $D(B)$ i loro derivati. Dimostrare che: a) se $A \subset B$ allora $D(A) \subset D(B)$; b) $D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$.

42. Sia $A$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$, $F(A)$ la frontiera di $A$.

Dimostrare che:

a) $A$ e $\complement A$ hanno la stessa frontiera;

b) $\mathring{A}$, $\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ e $F(A)$ sono a due a due disgiunti e ricoprono $X$.

43. Se $D$ è denso in $X$, allora $\overset{\circ}{\widehat{\complement D}} = \emptyset$.

44. Se $A$ e $B$ sono sottoinsiemi di uno spazio topologico $X$, allora $F(A \cup B) \subset F(A) \cup F(B)$.

45. Se $A$ è un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$, allora

$$F(\bar{A}) \subset F(A)\,; \qquad F(\mathring{A}) \subset F(A).$$

46. In uno spazio topologico $X$, un sottoinsieme $A$ è chiuso se, e solo se, $F(A) \subset A$.

47. Sia $B$ un chiuso dello spazio topologico $X$. Il complementare di $F(B)$ è denso in $X$ e $F(B)$ è privo di punti interni.