Metodo alternativo per risolvere l'esercizio 5.1.4 sulle dispense (è sicuramente molto più elegante il metodo presentato sulle dispense!)

Sia $f : X \to Y$, con Y spazio topologico e X dotato della topologia indotta. Verificare che se $A \subset X$, allora $\overline{A} = f^{-1}(\overline{f(A)})$.

Dimostriamo $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Se $x \in \overline{A}$, allora $f(x) \in \overline{f(A)}$, poiché f è continua, quindi $x \in f^{-1}(\overline{f(A)})$.

Dimostriamo $\overline{A} \supset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Se per assurdo non vale l'inclusione, c'è $x \in X$ tale che $x \in f^{-1}(\overline{f(A)})$ e $x \notin \overline{A}$. Quindi c'è un aperto U di X tale che $x \in U$ e $U \cap A = \emptyset$. Per la definizione di topologia indotta, $U = f^{-1}(V)$, per un aperto V di Y, quindi $V \cap f(A) = \emptyset$, siccome $U \cap A = \emptyset$. Siccome V è aperto, allora $V \cap \overline{f(A)} = \emptyset$. Da $x \in U$ e $U = f^{-1}(V)$ otteniamo $f(x) \in V$; da $x \in f^{-1}(\overline{f(A)})$ otteniamo $f(x) \in \overline{f(A)}$, assurdo.