Se U unione finita di sottospazi, U={0}, oppure U=R^2 oppure U è unione finita di sottospazi di dimensione 1. Devo controllare che una intersezione qualunque di U_i come sopra sia ancora della stessa forma. Se un fattore dell'intersezione è {0}, tutta l'intersezione è {0}; se un fattore è R^2, posso non considerarlo. Se v diverso da 0 sta nell'intersezione, sta in tutti i fattori, quindi anche il sottospazio generato da v ci sta.

Esercizi di Topologia (distanze, chiusura, interno, sottospazi, 10 Ottobre 2020)

(1) (a) Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$. Sia τ la famiglia dei sottoinsiemi di V che possono essere rappresentate come unioni finite di sottospazi di V; inoltre si suppone che $\emptyset \in \tau$. Verificare che τ è la famiglia di chiusi per una topologia (è una versione molto semplificata di quella che si chiama topologia di Zariski.)

(b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare, allora f è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Non posso avere infiniti sottospazi: basta che prenda un U_0 e non potrò avere altri sottospazi oltre a quelli contenuti in U_0

(c) La funzione g definita da $g(x, y) = (x^3, y^3)$ è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$ (pur non essendo lineare.) È un omeomorfismo?

(d) La funzione g definita da $g(x, y) = (x^2, y^2)$ è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$ (pur non essendo lineare.) È un omeomorfismo?

(e) Determinare in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ chiusura ed interno di $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 = 1\}$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

(f) ** (gli esercizi contrassegnati da un asterisco potrebbero risultare più difficili) Se al punto (a) si considera uno spazio vettoriale V qualunque al posto di $\mathbb{R}^2$, τ è una topologia? Se si assume che V ha dimensione finita?

(b) Controimmagine di un sottospazio mediante una applicazione lineare è un sottospazio. La controimmagine di un unione è l'unione delle controimmagini.

(c) un sottospazio V di dim 1 è del tipo x=ay (o y=0), equivalente ad x^3=a^3y^3, quindi g manda V in W determinato da x'=a^3y', e viceversa con la radice cubica.

(d) non è biiettiva, ma è continua. Ad esempio, se W nell'immagine è determinato da x'=ay' con a è negativo, la controimmagine è {0}, comunque un sottospazio. Altrimenti la controimmagine è l'unione dei sottospazi determinati da x=by e x=-by, con b radice quadrata di a.

(e) A: R^2, vuoto; B bisettrici assi cartesiani, vuoto; C: R^2, R^2 - sottospazio dato da x=y.

(d) se dimensione finita induzione ragionando come in (a) altrimenti possono esistere controesempi (vedi altro file).

(2) Verificare che se X è uno spazio metrico finito, allora la topologia indotta su X è la topologia discreta. `minimo fra le distanze`

Dare l'esempio di uno spazio metrico numerabile che induce la topologia discreta e di uno che induce una topologia diversa dalla topologia discreta.

Esiste uno spazio metrico numerabile i cui punti sono tutti isolati tranne uno? È sempre vero che uno spazio metrico numerabile ha sempre almeno un punto isolato?

`{1/n} oppure N, {1/n} ∪ {0},`

`no: Q`

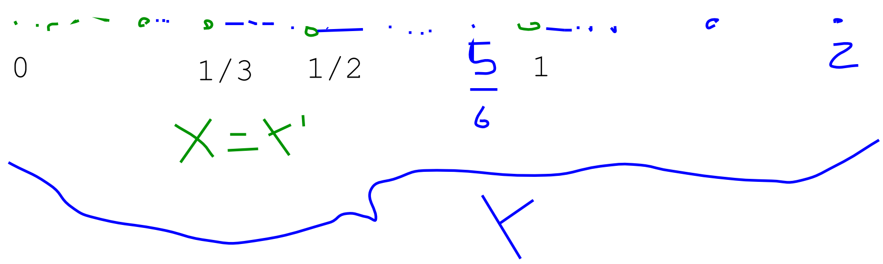
(3) (a) Sia $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ con la topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea. Determinare l'insieme X' dei punti di accumulazione di X. Chi è X''?

`{0}` `vuoto`

(b) Sia $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n, m \neq 0\}$. Determinare l'insieme Y' dei punti di accumulazione di Y. Chi è Y''?

(c) Esiste uno spazio metrico numerabile tale che $X' = X$? `sì: Q`

```
(b) Y' è l'insieme del punto (a).
Infatti (per n fissato) ogni intorno di
1/n contiene sempre elementi del tipo 1/n+1/m.
Viceversa, se q∈X e q≠1/n, per ogni n,
allora 1/(i+1) < q < 1/i, per qualche i
(oppure q>1, ma questo caso è semplice).
Sia a=min{q - 1/(i+1), 1/i - q }, allora
(q - a/2, q + a/2) contiene al massimo un
numero finito di elementi di X (se m,n > 2i+2,
allora 1/n+1/m < 1/(i+1), altrimenti solo
un numero finito sta nell'intervallo).
```



(4) (a) Sia X uno spazio topologico. Verificare che $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ e $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$, per ogni sottoinsieme A di X (suggerimento: l'esercizio si può risolvere direttamente, ma ~~è molto~~ più semplice usare le proprietà date dalle Proposizioni 3.2.6 e 4.1.5). forse è

Dimostrazione: [NB: limitatamente alle esercitazioni del corso $\subseteq$ e $\subset$ hanno lo stesso significato!]

$\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subseteq \overline{\mathring{A}}$, quindi $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subseteq \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$.

Nell'altra direzione, $\overline{\mathring{A}} \supseteq \mathring{A}$, quindi $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \supseteq \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, dunque $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \supseteq \overline{\mathring{A}}$.

L'altra uguaglianza si dimostra allo stesso modo.

(b) Dedurre dalla parte (a) che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, allora si possono ottenere al massimo 7 sottoinsiemi di X partendo da A e utilizzando solo le operazioni di chiusura e interno. I 7 sottoinsiemi sono A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ e $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

(c) Sia $A = (0,1) \cup (1,2] \cup \{3\}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. In questo caso particolare i 7 sottoinsiemi del punto precedente sono distinti?

(d) Sia $A = (0,1) \cup (1,2] \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5))$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. In questo caso particolare i 7 sottoinsiemi del punto precedente sono distinti?

(e) * Quanti insiemi si possono ottenere se nel punto (b) si ammette di poter utilizzare anche l'operazione $\complement$ di complemento?

	(c)	(d)
$\overline{A}$ =,	$[0,2] \cup \{3\}$	$[0,2] \cup \{3\} \cup [4,5]$
$\mathring{A}$=,	$(0,1) \cup (1,2)$	$(0,1) \cup (1,2)$
$\mathring{\overline{A}}$=,	$(0,2)$	$(0,2) \cup (4,5)$
$\overline{\mathring{A}}$ =,	$[0,2]$	$[0,2]$
$\overline{\mathring{\overline{A}}}$ =	$[0,2]$	$[0,2] \cup [4,5]$
$\mathring{\overline{\mathring{A}}}$=.	$(0,2)$	$(0,2)$

(e) 14 perchè complemento del complemento = insieme di partenza /
complemento di interno = chiusura del complemento

(5) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali con la topologia che ha per famiglia di chiusi i sottoinsiemi del tipo $[n, \infty)$, oltre all'insieme vuoto.

Se $A \subseteq \mathbb{N}$, sia $F(A) = A \cap \overline{\overline{A} \cap A^{\complement}}$. Sia P_n l'insieme dei numeri pari $\geq n$. Verificare che, se n è pari, allora $F(P_n) = P_{n+2}$ (quindi, a differenza dell'esercizio precedente, se si ammette di poter usare anche l'intersezione, è possibile ottenere un numero infinito di sottoiniemi, anche partendo da un unico sottoinsieme. Infatti, $F(P_0) = P_2$, $F(F(P_0)) = P_4, \ldots$).

n pari

$\overline{P_n} = [n, \infty)$;

$P_n^{\complement} = [0, n-1) \cup D_{n+1}$; (qui D_{n+1} indica i dispari $\geq n+1$)

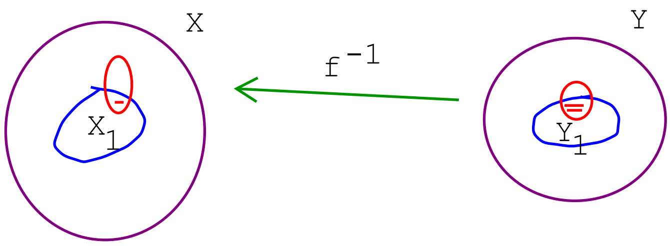
$\overline{P_n} \cap P_n^{\complement} = D_{n+1}$;

$\overline{\overline{P_n} \cap P_n^{\complement}} = [n+1, \infty)$;

$P_n \cap \overline{\overline{P_n} \cap P_n^{\complement}} = P_n \cap [n+1, \infty) = P_{n+2}$.

(6) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua fra due spazi topologici e siano X_1 e Y_1 sottospazi di X e Y, rispettivamente.

Se la restrizione $f_1 : X_1 \to Y_1$ è una funzione (perchè è necessara questa ipotesi?) allora f_1 è continua da X_1 a Y_1.



Oppure: j:Y_1 -> Y immersione, f↾(X_1) :X_1 -> Y
f↾(X_1)=j o f_1 continua sse f_1 continua
per la proprietà caratteristica Prop. 4.3.4.
Ma se i:X_1 -> X immersione, f↾(X_1)= f o i
continua perchè composizione di funzioni
continue.

(7) Sia X un insieme e sia $\overline{}$ una funzione da $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(X)$ che soddisfa alle proprietà date dalla Proposizione 3.2.6 (qui X non è a priori dotato di una topologia, abbiamo solo questa funzione $\overline{}$).

Verificare che l'insieme dei sottoinsiemi A di X tali che $\overline{A} = A$ è la famiglia dei chiusi per una topologia.

Anche in questo modo si ottiene una definizione equivalente per la nozione di topologia.

A c A-   X- = X
0- = 0
unione finita segue da (4)

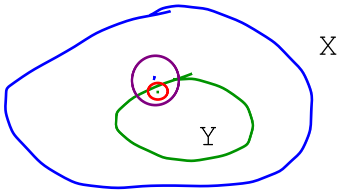
A_i tali che (A_i segnato)=A_i per ogni i
faccio l'intersezione A
A c A_i quindi per (*) A segnato c A_i
(A segnato) c (intersezione A_i) = A

(*) A c B implica A segnato contenuto in
B segnato
(segue da 4)

quindi è la famiglia di chiusi per una topologia

topologia --> chiusura --> topologia --> chiusura
funzione
con
proprieta'

palla=sfera



(8) Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. La restrizione $d_{\restriction Y}$ di d ad Y definisce una distanza su Y. È vero che la topologia su Y determinata da $d_{\restriction Y}$ è la topologia di sottospazio indotta dalla topologia su X determinata da d? per ogni y in Y ∩ sfera di X c'è una sfera di centro y... quindi ogni aperto in top sottosp è aperto in top d↾Y

(9) * Siano X ed Y due spazi metrici disgiunti. Si può sempre definire una distanza d su $X \cup Y$ in modo che le restrizioni di d ad X (rispettivamente, ad Y) coincidano con le distanze originarie?

La conclusione della frase precedente è vera senza l'ipotesi che X ed Y siano disgiunti? (Naturalmente bisogna supporre che le distanze su X ed Y coincidano sull'intersezione $X \cap Y$. È sufficiente, questa ipotesi?)

fisso a in X e b in Y e definisco
d(y,x)=d(x,y)= d_X(x,a)+d_Y(y,b)+1 se x in X e y in Y
negli altri casi prendo d_X e d_Y
è una distanza, ad esempio,
d(x,x')+d(x',y)=d_X(x,x')+d_X(x',a)+d_Y(y,b)+1
≥ d_X(x,a)+d_Y(y,b)+1=d(x,y)

Intuitivamente, due isole, ciascuna con un solo porto,
d è la distanza che devo effettivamente percorrere

la risposta alla seconda domanda è NO
ma è un argomento delicato:
X come {0}∪{1/n}, Y simile ma {0'}∪{1/n}
con 0≠0' allora la distanza fra 0 e 0' puo'
essere resa piccola a piacere, quindi è zero,
quindi devono essere uguali.
d(0,0') < d(0, 1/n)+ d(1/n, 0') = 2/n per ogni n>0

(10) (a) * È necessaria la proprietà (3) delle distanze (cioè, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$) per dimostrare che la famiglia $\mathcal{B}$ è la base per una topologia? Suggerimento: considerare la proprietà (3) come suddivisa in due proprietà:
(3a) $d(x, x) = 0$, per ogni $x \in X$, e
(3b) $d(x, y) = 0$ implica $x = y$, per ogni $x, y \in X$.

(b) ** Sia X un insieme, ed S sia un insieme dotato di una relazione di ordine e di un'operazione binaria $+$. Si può dare una definizione di distanza generalizzata sotto queste ipotesi?
Che condizioni bisogna imporre su S affinché si possa parlare di topologia associata ad una distanza generalizzata?

(a) Serve (3a), se no x non appartiene necessariamente alle sfere di centro x.
Ad esempio, supponiamo di avere tre punti a,b,c tali che valgano tutte le proprietà della distanza tranne (3a) e sia d(a,b)=d(a,c)=1 d(a,c)=2 d(b,b)=d(c,c)=0 e d(a,a)=1,5. Allora le sfere di raggio 2 di centri b e c sono rispettivamente {b,a} e {c,a}, ma la loro intersezione {a} non è unione di sfere.

(b) Supponiamo per semplicità che l'ordine sia totale. Ci vuole uno 0 che sia minore di ogni altro elemento; poi ogni volta che 0<a<b serve c tale che a+c<b e inoltre a+c'<b, per ogni c'<c.
Con queste condizioni viene associata una topologia, ma non sempre ha buone proprieta'.
(Solitamente si richiede che d<d' implichi a+d<a+d', per ogni a,d,d')