Esercizi di Topologia (definizione di topologia, funzioni continue, basi, 2 Ottobre 2020)

(1) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Ricordiamo che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

(a) Dire quali delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono topologie su $\mathbb{N}$.

(A) Tutti i sottoinsiemi finiti; non c'è tutto N

(B) Tutti i sottoinsiemi infiniti; non c'è il vuoto

(C) Tutti i sottoinsiemi finiti più $\mathbb{N}$; non chiuso per unioni infinite

(D) Tutti i sottoinsiemi infiniti più l'insieme vuoto; P=pari, D=dispari $(\{1\} \cup P) \cap D \notin$

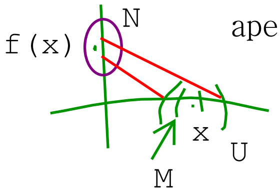
(E) Tutti gli insiemi del tipo $(n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n < m\}$, al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto. non c'è N

(F) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \le m\}$, al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto. sì: $[m,\infty) \cap [n,\infty) = [\max(m,n),\infty)$; per unioni, prendo il minimo

(G) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \le m\}$, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali pari; più l'insieme vuoto. sì, come F

(b) Lo stesso esercizio, sostituendo ovunque $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi, al posto di $\mathbb{N}$. mai, per gli stessi motivi; nei casi F,G non c'è tutto Z

(c) Dire se la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ è una topologia su $\mathbb{Z}$: la famiglia degli insiemi del tipo $\mathbb{Z}_{m,n} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \le -m, \text{ oppure } z \ge n\}$, al variare di $m, n \in \mathbb{N}$. E se si aggiunge alla famiglia l'insieme vuoto? sì, simile ad F (a)=>(b) N, essendo aperto, in particolare è un intorno; per definizione di continuità in x c'è U intorno di x tale che f(U)$\subset$N. Siccome U è un intorno, c'è un aperto M...



(b)=>(c) Se U intorno di f(x), esiste un aperto N tale che f(x)$\in$N$\subset$U. Quindi per (b)...

(c)=>(a) ovvio perché f(f^{-1}(U))$\subset$U

(2) Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Se $x \in X$, verificare che le condizioni seguenti sono equivalenti.
   (a) f è continua in x.
   (b) Per ogni aperto N di (Y, σ) tale che $f(x) \in N$ esiste un aperto M di (X, τ) tale che $x \in M$ e $f(M) \subset N$.
   (c) La controimmagine di ogni intorno di $f(x)$ è un intorno di x. preimmagine

Fornire un controesempio che mostra che le condizioni precedenti *non* sono equivalenti a
   (d) La controimmagine di ogni aperto a cui appartiene $f(x)$ è un aperto che contiene x.

NB: stiamo parlando di continuità in un punto, non globalmente!!!

f:R->R   f(x)= 0 se x≤0
         f(x)= 1 se x>0

continua in tutti i punti tranne 0, ma la preimmagine di (-1/2,1/2) non è aperto.

Basta prendere x <0.

(3) Siano X, Y, Z spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni (non necessariamente continue) ed $h = g \circ f$ quindi $h : X \to Z$.

È vero che se f e g sono chiuse, allora anche h è chiusa?

È vero che se f e g sono aperte, allora anche h è aperta?

È vero che se f e g sono omeomorfismi, allora anche h è un omeomorfismo?

continua biunivoca e chiusa

(4) È vero che ogni topologia è anche una base? Se sì, è sempre una base per se stessa? `sì`

Quali delle famiglie definite nell'esercizio (1) sono basi per qualche topologia?

`(1)(a): A,C,F,G. Per B,D non vale la seconda proprietà, per E non vale la prima (nessun elemento contiene 0)`

(5) Siano $X_1 = \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, $X_2 = \mathbb{N}$, $X_3 = \mathbb{Z}$, $X_4 = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $X_5 = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $X_6 = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

In ciascun caso, sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{x \in X_i \mid a < x < b\}$, con $a < b \in X_i$. (NB: qui a e b devono appartenere ad X_i, non sono numeri reali qualunque)

In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per una topologia su X_i? In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per la topologia discreta?

1,5

topologia di sottospazio
indotta dalla top
euclidea su R

2,4,6: 0 non sta
in nessun elemento

3 sì
top discr
(z-1,z+1)

(6) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

(a) Sia $\mathcal{B}_1$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_1$ è la base per una topologia τ_1 su $\mathbb{R}$. Verificare che τ_1 è la topologia euclidea.

(b) Sia $\mathcal{B}_2$ la famiglia degli intervalli chiusi del tipo $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$, con $a \leq b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_2$ è la base per una topologia τ_2 su $\mathbb{R}$. discreta [a,a]={a}

(c) Sia $\mathcal{B}_3$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_3$ è la base per una topologia τ_3 su $\mathbb{R}$ (viene chiamata topologia di Sorgenfrey).

(d) Sia $\mathcal{B}_4$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $(a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_4$ è la base per una topologia τ_4 su $\mathbb{R}$. Sorgenfrei "alla rovescia"

(e) Verificare che le topologie $\tau_1 \ldots \tau_4$ sono tutte distinte. [a,b) aperto in (c) non in (a),(d)

(f) Per quali i e j la funzione identica da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ è continua da $(\mathbb{R}, \tau_i)$ ad $(\mathbb{R}, \tau_j)$?

(g) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau_3)$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_4)$. x --> -x

(h) Sapreste dare una caratterizzazione più semplice di τ_2?

(i) Come (b) ma al variare di a<b.
Non è una base: [a,b]∩[b,c]={b} non può essere scritto come unione... E' una sottobase e, per sopra, gnerala topologia discreta (tutti i singoletti sono aperti).

(7) Sia X un insieme e $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ basi per due topologie, rispettivamente, τ_1 e τ_2 su X. Verificate che $\tau_1 = \tau_2$ se e solo se ogni elemento di $\mathcal{B}_1$ è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}_2$, e viceversa.

`Conviene usare la definizione originaria di base, non la caratterizzazione equivalente.`

(8) (a) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. (NB: qui a e b variano in $\mathbb{Q}$, non in $\mathbb{R}$).

(b) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea.

(c) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$. Si tratta della topologia di Sorgenfrey? (vedi esercizio sopra)

In tutti i casi l'unione è tutto lo spazio
e l'intersez. di due intervalli di quel tipo è
ancora un intervallo di quel tipo (oppure
il vuoto) quindi si tratta di basi.
(a) e (b): sì, perchè ogni intervallo con
estremi reali è unione di intervalli con estremi
razionali (rispetivamente, irrazionali).
(c) No, perchè un intervallo del tipo [r,b)
con r irrazionale è aperto nella topologia di
Sorgenfrey, ma non è aperto nella topologia
data da (c) (se voglio che r stia in un aperto,
deve stare almeno in un elemento della base...)

r in [a,c) a<r

(9) Sia X un insieme e siano τ e σ due topologie su X.

– Verificare che $\tau \cap \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ e } U \in \sigma\}$ è una topologia su X. $\tau \cap \sigma$ è la topologia più forte fra le topologie che sono più deboli sia di τ che di σ.

– La famiglia $\tau \cup \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ oppure } U \in \sigma\}$ è una topologia su X? È una base per qualche topologia? È una sottobase per qualche topologia?

– intersezioni finite ed unioni infinite ci stanno. Ogni topologia più debole contiene solo (in generale, alcuni fra gli) aperti di quel tipo.

– In generale, no, perchè se U ∈ τ, V ∈ σ, non è detto che U ∩ V stia in τ ∪ σ. Controesempio: τ continuità superiore e σ continuità inferiore (dimostra che, in generale, τ ∪ σ non è nemmeno una base).
Però è una sottobase (l'unione è tutto), anzi, è la sottobase per la topologia più debole tale che...

(10) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua fra spazi topologici (X, τ) e (Y, σ).

(a) È vero che se $\mathcal{B}$ è una base per σ, allora $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base per qualche topologia τ' su X? È una base per τ?

(b) È vero che se $\mathcal{B}$ è una base per τ, allora $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base per qualche topologia σ' su X? È una base per σ? è una sottobase?

(b) No, basta prendere f non suriettiva.
Ma anche se f fosse suriettiva, non è detto che sia un base.
Ad esempio, X={a,b,c,d}, con {a,b},{c,d} gli unici aperti non banali, Y={a',b',d'}, con f(b)=f(c)=b' ...