Esercizi di Topologia (quozienti, assiomi di separazione, 8 Novembre 2021)

(1) Sia X uno spazio topologico, $f : X \to Y$ una funzione suriettiva e si doti Y della topologia quoziente.
  (a) Se X ha la topologia discreta, è vero che Y ha la topologia discreta? E per la topologia indiscreta? Per la topologia cofinita?
  (b) Se Y ha la topologia discreta, è vero che X ha la topologia discreta? E con la topologia indiscreta? Con la topologia cofinita?
  (c) Se X è uno spazio metrico, è vero che Y è metrizzabile?
  (d) Sia $X = [0, 1]$, $Y = \{a, b\}$ e sia $f(x) = a$ se x è razionale, $f(x) = b$ se x è irrazionale. Che topologia ha Y?
  (e) Sia $X = [0, 1]$ e Y il quoziente ottenuto collassando $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Chiamiamo a la classe di equivalenza $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, gli altri elementi di Y si possono identificare con i numeri irrazionali compresi tra 0 e 1.
    (i) Verificare che ogni aperto non vuoto di Y contiene a, in particolare, Y non è T_1.
    (ii) Verificare che se r è irrazionale, allora $Y \setminus \{r\}$ è aperto in Y, quindi Y è T_0.
    (iii) * Sapreste caratterizzare gli altri aperti di Y?
  (f) Esiste uno spazio topologico T_4 tale che un suo quoziente non è T_0?

(2) Supponiamo che (X, τ) e (Y, σ) siano spazi topologici, con X e Y insiemi disgiunti. Su $X \cup Y$ si può definire una topologia ρ al seguente modo: se $A \subseteq X \cup Y$, allora A è un aperto di ρ se e solo se $A \cap X$ è un aperto di τ e $A \cap Y$ è un aperto di σ. In altre parole, un aperto di ρ è l'unione di un aperto di τ con un aperto di σ (ricordiamo che X e Y sono disgiunti). La topologia ρ è detta *topologia dell'unione disgiunta.*
  (a) Verificare che ρ è una topologia su $X \cup Y$.
  (b) È vero che se τ e σ sono la topologia discreta (indiscreta, cofinita) allora anche ρ è la topologia discreta (indiscreta, cofinita)?
  (c) È vero che se (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff, allora $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff?
  È vero che se $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff, allora (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff?
  E per gli altri assiomi di separazione?
  (d) Siano X e Y sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{R}$, con la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea. È vero che la topologia dell'unione disgiunta è la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $X \cup Y$?
  (e) Verificare che X è un sottospazio di $X \cup Y$, lo stesso per Y.
  (f) ρ è l'unica topologia su $X \cup Y$ tale che X è un sottospazio di $X \cup Y$ ed Y è un sottospazio di $X \cup Y$?
  (g) Siano $i : X \to X \cup Y$ e $j : X \to X \cup Y$ le (estensioni delle) funzioni identità. Verificare che i e j sono continue, aperte e chiuse. Inoltre ρ è la topologia più forte che rende i e j continue.
  (h) La topologia dell'unione disgiunta è una topologia coindotta? (vedere l'esercizio 7.2.5 delle dispense...)

(i) Siano X ed Y spazi metrici disgiunti, e siano τ e σ le topologie indotte dalle rispettive metriche. Esiste una metrica su $X \cup Y$ che induce la topologia ρ?

(3) Se X è un insieme totalmente ordinato, dotato della topologia d'ordine, allora X è T_2. È T_3? (**) È T_4?

(4) (a) In uno spazio T_2 ogni successione convergente converge ad un unico punto.

(b) Se X è uno spazio topologico e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_1.

(c) Se X è uno spazio topologico primo numerabile e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_2.

(d) * Diamo per noto che esiste un insieme totalmente ordinato X tale che, per ogni sottoinsieme finito o numerabile $A \subset X$ esiste $x \in X$ tale che $a < x$, per ogni $a \in A$.
Sia X un tale insieme totalmente ordinato e sia $Y = X \cup \{\omega, \rho\}$, dove ω, ρ sono due "nuovi" elementi distinti non appartenenti ad X.
Diamo ad Y la topologia generata dalla seguente base $\mathcal{B}$. Elementi di $\mathcal{B}$ sono tutti i sottoinsiemi aperti di X nella topologia d'ordine. Inoltre sono elementi di $\mathcal{B}$ tutti gli insiemi del tipo $\{\omega\} \cup (x, \infty)$ e $\{\rho\} \cup (x, \infty)$, al variare di $x \in X$.
Con questa topologia Y è T_1 ma non T_2.
In Y ogni successione convergente converge ad un unico punto (usare la proprietà di X enunciata all'inizio),

(5) (a) Se (X, τ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2) e σ è una topologia più forte di τ, allora anche (X, σ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2).

(b) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subset X$. Dire se esiste la topologia più debole fra le topologie che:
- contengono A, e
- sono più forti di τ.

(c) Sia $[0, 1]$ l'intervallo unitario con la topologia euclidea ε, e sia σ la topologia più debole che contiene $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e che è più forte di ε.
Verificare che $[0, 1]$ con la topologia σ non è T_3. Quindi l'analogo della parte (a) non vale per T_3 (e nemmeno T_4).

(d) Uno spazio con la topologia discreta è T_4.

(e) Siano τ_1, τ_2 e τ_3 topologie sullo stesso insieme X, tali che τ_1 è più debole di τ_2 e τ_2 è più debole di τ_3.
È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_2, allora anche (X, τ_2) è T_2?
È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_4, allora anche (X, τ_2) è T_4?
È almeno T_3, lo spazio (X, τ_2)?

(6) Esiste uno spazio topologico che non è T_1 ma tale che, dati due chiusi disgiunti qualunque C e D esistono aperti disgiunti U e V tali che $C \subseteq U$ e $D \subseteq V$?

(7) Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in X ha una sottosuccessione convergente (una sottosuccessione è $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ con I sottoinsieme infinto di $\mathbb{N}$).

(a) Verificare che il prodotto di due spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni.

(b) Se X è compatto per successioni, allora anche ogni sottospazio Y

chiuso di X è compatto per successioni.

(c) Mostrare con un controesempio che l'ipotesi che Y sia chiuso è necessaria nel punto precedente.

(d) ** Un prodotto numerabile di spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni, ma in generale un prodotto più che numerabile non lo è. (Vedi Engelking Teorema 3.10.35)