Esercizi di Topologia (distanze, chiusura, interno, sottospazi, Ottobre 2021)

(1) (a) Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$. Sia τ la famiglia dei sottoinsiemi di V che possono essere rappresentate come unioni finite di sottospazi di V; inoltre si suppone che $\emptyset \in \tau$. Verificare che τ è la famiglia di chiusi per una topologia (è una versione molto semplificata di quella che si chiama topologia di Zariski.)

(b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare, allora f è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

(c) La funzione g definita da $g(x, y) = (x^3, y^3)$ è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$ (pur non essendo lineare.) È un omeomorfismo?

(d) La funzione g definita da $g(x, y) = (x^2, y^2)$ è continua da $(\mathbb{R}^2, \tau)$ a $(\mathbb{R}^2, \tau)$ (pur non essendo lineare.) È un omeomorfismo?

(e) Determinare in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ chiusura ed interno di $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 = 1\}$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

(f) ** (gli esercizi contrassegnati da un asterisco potrebbero risultare più difficili) Se al punto (a) si considera uno spazio vettoriale V qualunque al posto di $\mathbb{R}^2$, τ è una topologia? Se si assume che V ha dimensione finita?

(2) Verificare che se X è uno spazio metrico finito, allora la topologia indotta su X è la topologia discreta.

Dare l'esempio di uno spazio metrico numerabilie che induce la topologia discreta e di uno che induce una topologia diversa dalla topologia discreta.

Esiste uno spazio metrico numerabile i cui punti sono tutti isolati tranne uno? È sempre vero che uno spazio metrico numerabile ha sempre almeno un punto isolato?

(3) (a) Sia $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ con la topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea. Determinare l'insieme X' dei punti di accumulazione di X. Chi è X''?

(b) Sia $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n, m \neq 0\}$. Determinare l'insieme X' dei punti di accumulazione di X. Chi è X''?

(c) Esiste uno spazio metrico numerabile tale che $X' = X$?

(4) (a) Sia X uno spazio topologico. Verificare che $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ e $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}=\mathring{\overline{A}}$, per ogni sottoinsieme A di X (suggerimento: l'esercizio si può risolvere direttamente, ma forse è più semplice usare le proprietà date dalle Proposizioni 3.2.6 e 4.1.5).

(b) Dedurre dalla parte (a) che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, allora si possono ottenere al massimo 7 sottoinsiemi di X partendo da A e utilizzando solo le operazioni di chiusura e interno. I 7 sottoinsiemi sono A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ e $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

(c) Sia $A = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. In questo caso particolare i 7 sottoinsiemi del punto precedente sono distinti?

(d) Sia $A = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5))$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. In questo caso particolare i 7 sottoinsiemi del punto precedente sono distinti?

(e) * Quanti insiemi si possono ottenere se nel punto (b) si ammette di poter utilizzare anche l'operazione $\complement$ di complemento?

(5) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali con la topologia che ha per famiglia di chiusi i sottoinsiemi del tipo $[n, \infty)$, oltre all'insieme vuoto.

Se $A \subseteq \mathbb{N}$, sia $F(A) = A \cap \overline{\overline{A} \cap A^{\complement}}$. Sia P_n l'insieme dei numeri pari $\geq n$. Verificare che, se n è pari, allora $F(P_n) = P_{n+2}$ (quindi, a differenza dell'esercizio precedente, se si ammette di poter usare anche l'intersezione, è possibile ottenere un numero infinito di sottoiniemi, anche partendo da un unico sottoinsieme. Infatti, $F(P_0) = P_2$, $F(F(P_0)) = P_4$, ...).

(6) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua fra due spazi topologici e siano X_1 e Y_1 sottospazi di X e Y, rispettivamente.

Se la restrizione $f_1 : X_1 \to Y_1$ è una funzione (perchè è necessara questa ipotesi?) allora f_1 è continua da X_1 a Y_1.

(7) Sia X un insieme e sia $\overline{}$ una funzione da $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(X)$ che soddisfa alle proprietà date dalla Proposizione 3.2.6 (qui X non è a priori dotato di una topologia, abbiamo solo questa funzione $\overline{}$).

Verificare che l'insieme dei sottoinsiemi A di X tali che $\overline{A} = A$ è la famiglia dei chiusi per una topologia.

Anche in questo modo si ottiene una definizione equivalente per la nozione di topologia.

(8) Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. La restrizione $d_{\restriction Y}$ di d ad Y definisce una distanza su Y. È vero che la topologia su Y determinata da $d_{\restriction Y}$ è la topologia di sottospazio indotta dalla topologia su X determinata da d?

(9) * Siano X ed Y due spazi metrici disgiunti. Si può sempre definire una distanza d su $X \cup Y$ in modo che le restrizioni di d ad X (rispettivamente, ad Y) coincidano con le distanze originarie?

La conclusione della frase precedente è vera senza l'ipotesi che X ed Y siano disgiunti? (Naturalmente bisogna supporre che le distanze su X ed Y coincidano sull'intersezione $X \cap Y$. È sufficiente, questa ipotesi?)

(10) (a) * È necessaria la proprietà (3) delle distanze (cioè, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$) per dimostrare che la famiglia $\mathcal{B}$ è la base per una topologia? Suggerimento: considerare la proprietà (3) come suddivisa in due proprietà:
(3a) $d(x, x) = 0$, per ogni $x \in X$, e
(3b) $d(x, y) = 0$ implica $x = y$, per ogni $x, y \in X$.

(b) ** Sia X un insieme, ed S sia un insieme dotato di una relazione di ordine e di un'operazione binaria $+$. Si può dare una definizione di distanza generalizzata sotto queste ipotesi?
Che condizioni bisogna imporre su S affinché si possa parlare di topologia associata ad una distanza generalizzata?