Esercizi di Topologia (definizione di topologia, funzioni continue, basi, ottobre 2021)

(1) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Ricordiamo che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.
  (a) Dire quali delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono topologie su $\mathbb{N}$.
    (A) Tutti i sottoinsiemi finiti;
    (B) Tutti i sottoinsiemi infiniti;
    (C) Tutti i sottoinsiemi finiti più $\mathbb{N}$;
    (D) Tutti i sottoinsiemi infiniti più l'insieme vuoto;
    (E) Tutti gli insiemi del tipo $(n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n < m\}$, al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto.
    (F) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$, al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto.
    (G) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali pari; più l'insieme vuoto.
  (b) Lo stesso esercizio, sostituendo ovunque $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi, al posto di $\mathbb{N}$.
  (c) Dire se la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ è una topologia su $\mathbb{Z}$: la famiglia degli insiemi del tipo $\mathbb{Z}_{m,n} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq -m, \text{ oppure } z \geq n\}$, al variare di $m, n \in \mathbb{N}$. E se si aggiunge alla famiglia l'insieme vuoto?

(2) Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Se $x \in X$, verificare che le condizioni seguenti sono equivalenti.
  (a) f è continua in x.
  (b) Per ogni aperto V di (Y, σ) tale che $f(x) \in V$ esiste un aperto U di (X, τ) tale che $x \in U$ e $f(U) \subset V$.
  (c) La controimmagine di ogni intorno di $f(x)$ è un intorno di x ("controimmagine", "preimmagine" e "immagine inversa" sono sinonimi).

  Fornire un controesempio che mostra che le condizioni precedenti *non* sono equivalenti a
  (d) La controimmagine di ogni aperto a cui appartiene $f(x)$ è un aperto che contiene x.

(3) Siano X, Y, Z spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni (non necessariamente continue) ed $h = g \circ f$ quindi $h : X \to Z$.
  È vero che se f e g sono chiuse, allora anche h è chiusa?
  È vero che se f e g sono aperte, allora anche h è aperta?
  È vero che se f e g sono omeomorfismi, allora anche h è un omeomorfismo?

(4) È vero che ogni topologia è anche una base? Se sì, è sempre una base per se stessa?
  Quali delle famiglie definite nell'esercizio (1) sono basi per qualche topologia?

(5) Siano $X_1 = \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, $X_2 = \mathbb{N}$, $X_3 = \mathbb{Z}$, $X_4 = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $X_5 = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $X_6 = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

In ciascun caso, sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a,b) = \{x \in X_i \mid a < x < b\}$, con $a < b \in X_i$. (NB: qui a e b devono appartenere ad X_i, non sono numeri reali qualunque)

In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per una topologia su X_i? In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per la topologia discreta?

(6) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.
   (a) Sia $\mathcal{B}_1$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_1$ è la base per una topologia τ_1 su $\mathbb{R}$. Verificare che τ_1 è la topologia euclidea.
   (b) Sia $\mathcal{B}_2$ la famiglia degli intervalli chiusi del tipo $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$, con $a \leq b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_2$ è la base per una topologia τ_2 su $\mathbb{R}$.
   (c) Sia $\mathcal{B}_3$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_3$ è la base per una topologia τ_3 su $\mathbb{R}$ (viene chiamata topologia di Sorgenfrey).
   (d) Sia $\mathcal{B}_4$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $(a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_4$ è la base per una topologia τ_4 su $\mathbb{R}$.
   (e) Verificare che le topologie $\tau_1 \dots \tau_4$ sono tutte distinte.
   (f) Per quali i e j la funzione identica da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ è continua da $(\mathbb{R}, \tau_i)$ ad $(\mathbb{R}, \tau_j)$?
   (g) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau_3)$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_4)$.
   (h) Sapreste dare una caratterizzazione più semplice di τ_2?
   (i) Se si modifica la parte (b) definendo $\mathcal{B}'_2$ la famiglia degli intervalli chiusi del tipo $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$ (qui abbiamo $<$ anziché $\leq$). $\mathcal{B}'_2$ è una base? Una sottobase? Se sì, per quale topologia?

(7) Sia X un insieme e $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ basi per due topologie, rispettivamente, τ_1 e τ_2 su X. Verificate che $\tau_1 = \tau_2$ se e solo se ogni elemento di $\mathcal{B}_1$ è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}_2$, e viceversa.

(8) (a) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. (NB: qui a e b variano in $\mathbb{Q}$, non in $\mathbb{R}$).
   (b) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea.
   (c) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$. Si tratta della topologia di Sorgenfrey? (vedi esercizio sopra)

(9) Sia X un insieme e siano τ e σ due topologie su X.

Verificare che $\tau \cap \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ e } U \in \sigma\}$ è una topologia su X. $\tau \cap \sigma$ è la topologia più forte fra le topologie che sono più deboli sia di τ che di σ.

La famiglia $\tau \cup \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ oppure } U \in \sigma\}$ è una topologia su X? È una base per qualche topologia? È una sottobase per qualche topologia?

(10) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua fra spazi topologici (X, τ) e (Y, σ).

(a) È vero che se $\mathcal{B}$ è una base per σ, allora $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base per qualche topologia τ' su X? È una base per τ?

(b) È vero che se $\mathcal{B}$ è una base per τ, allora $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base per qualche topologia σ' su X? È una base per σ? È una sottobase per qualche topologia su X?