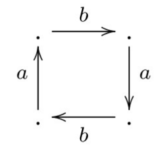
Esercizio 13.1.11. Dimostrare che il quoziente del quadrato coi lati identificati come in figura è omeomorfo a $\mathbb{RP}^2$.



Esercizio 13.1.12. Consideriamo il cilindro

$$C' := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

e sia $\simeq$ la relazione di equivalenza che collassa ad un punto la circonferenza $C' \cap \{z = 0\}$. Mostrare che lo spazio quoziente $C'/_{\simeq}$ è omeomorfo al cono

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2, |z| \leq 1\}.$$

Esercizio 13.1.13. Mostrare che se collasso $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ ad un punto ottengo un quoziente omeomorfo alla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Esercizio 13.2.3. Sia X un insieme non numerabile. Definiamo una topologia su X, detta topologia conumerabile, come segue: un sottoinsieme di X è aperto se è vuoto oppure se il suo complementare è numerabile. Dimostrare che è una topologia, e che se una successione (x_n) converge ad un punto a allora è definitivamente uguale ad a.

Soluzione. Dimostriamo le condizioni riguardo ai chiusi. Chiaramente $\varnothing$ e X sono chiusi. Se C_1 e C_2 sono due chiusi allora sono numerabili, e quindi la loro unione è numerabile. Se $(C_i)_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi numerabili, l'intersezione $\bigcap_{i \in I} C_i$ è numerabile.

Sia (x_n) una successione non definitivamente uguale ad a. Sia C l'insieme numerabile dato da $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \setminus \{a\}$ (è l'immagine della successione a cui togliamo a). Il complementare di C è un aperto, contiene a, e la successione (x_n) sta frequentemente nel suo complementare C.

Quindi studiando le successioni convergenti non possiamo distinguere la topologia conumerabile dalla topologia discreta! In altre parole le successioni non bastano per descrivere la topologia conumerabile. Vediamo ad esempio che la continuità non si può caratterizzare con le successioni:

Esempio 13.2.4. Sia X un insieme non numerabile e sia $f \colon X \to X$ l'identità, dove in partenza mettiamo la topologia conumerabile e in arrivo la topologia discreta. Chiaramente f non è continua. Se una successione (x_n) converge ad $a \in X$, è definitivamente uguale ad a, e quindi $f(x_n)$ è definitivamente uguale a $f(a)$, e perciò converge ad $f(a)$.