

Riparametrizzazioni ed associatività del prodotto tra cammini (modulo omotopia). (da ricontrollare)

(a) Sia f un omeomorfismo da $[0, 1]$ a $[0, 1]$ tale che $f(0) = 0$ (e quindi $f(1) = 1$, perchè?). Allora, per ogni spazio topologico X e ogni cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, la funzione $\gamma^\bullet$ definita da $\gamma^\bullet(t) = \gamma(f(t))$ è un cammino (per ora basta assumere che f sia continua).

Per l'ipotesi $f(0) = 0$, i punti di partenza dei cammini γ e $\gamma^\bullet$ coincidono, e per l'ipotesi $f(1) = 1$ i punti di arrivo di γ e $\gamma^\bullet$ coincidono, e

Una funzione f come sopra si chiama *riparametrizzazione*. Il motivo è che i cammini γ e $\gamma^\bullet$ rappresentano la stessa curva, ma percorsa con velocità differenti.

Vediamo che, sotto le ipotesi precedenti, γ e $\gamma^\bullet$ sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. Un'omotopia è data da

$$(1) \quad F(t, s) = \gamma((1-s)t + sf(t)).$$

Infatti, F è continua perchè composizione di funzioni continue, $F(t, 0) = \gamma(t)$, $F(t, 1) = \gamma(f(t)) = \gamma^\bullet(t)$ e inoltre $F(0, s) = \gamma(0) = \gamma^\bullet(0)$ e $F(1, s) = \gamma(1) = \gamma^\bullet(1)$.

(b) Siano adesso $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow X$ cammini tali che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$.

I cammini $\gamma = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e $\gamma' = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ sono in generale diversi. Ad esempio, $\gamma(\frac{1}{2}) = \gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, mentre $\gamma'(\frac{1}{2}) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ e questi valori non sono necessariamente uguali. Ma, anche nel caso in cui si trattasse di cammini chiusi, $\gamma(\frac{1}{4}) = \gamma_1(1)$, mentre $\gamma'(\frac{1}{4}) = \gamma_1(\frac{1}{2})$ e questi valori generalmente sono diversi.

Usando una riparametrizzazione vediamo però che $\gamma = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e $\gamma' = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. Sia f definita da

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Innanzitutto f è ben definita, perchè i valori di $f(\frac{1}{4})$ e di $f(\frac{1}{2})$ combaciano nei casi che si sovrappongono. È continua per il lemma di incollamento, ed è biiettiva, quindi un omeomorfismo (perchè basta continua e biiettiva?).

Adesso basta controllare che se $\gamma' = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$, allora, usando la f appena definita e definendo $\gamma^\bullet(t) = \gamma'(f(t))$ come all'inizio di (a), abbiamo $\gamma^\bullet = \gamma = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$.

(c) Naturalmente, in questo caso particolare, la definizione di un'omotopia fra γ' e γ si poteva dare direttamente come:

$$F(t, s) = \begin{cases} \gamma'(st + t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \gamma'(t + \frac{1}{4}s) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma'(t - \frac{1}{2}st + \frac{1}{2}s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

(abbiamo semplicemente sostituito nell'equazione (1) i valori espliciti di f dati da (2), salvo errori di calcolo).

Infatti $F(t, 0) = \gamma'(t)$, per ogni t . Inoltre, per $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$, $F(t, 1) = \gamma'(2t) = \gamma_1(4t) = \gamma(t)$ e così via per gli altri intervalli.

Esercizio. Serve l'ipotesi che f sia un omeomorfismo, nei ragionamenti precedenti, oppure basta semplicemente che f sia continua e che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$?

Esercizio. Si definisca una relazione $\cong$ fra cammini mediante $\gamma \cong \gamma^\bullet$ se $\gamma^\bullet(t) = \gamma(f(t))$, per qualche f come nel primo paragrafo in (a).

Si tratta di una relazione di equivalenza?

È distinta dall'omotopia tra cammini relativa a $\{0, 1\}$?

(d) Supponiamo adesso di avere più di tre cammini, ad esempio, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0, 1] \rightarrow X$, sempre con le condizioni che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ e, naturalmente, anche $\gamma_3(1) = \gamma_4(0)$.

Quindi possiamo costruire i cammini $\gamma_A = ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4$ e $\gamma_B = \gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \gamma_4))$ (si possono costruire altri cammini usando $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ed $*$?)

Sono omotopi γ_A e γ_B ?

La risposta è sì, ma la verifica contiene un punto delicato.

(d1) È intuitivo che si può costruire una riparametrizzazione opportuna in maniera simile a quanto fatto in (a)-(c) sopra. Questo metodo diventa sicuramente molto complesso quando si devono considerare molti cammini (ad esempio, nella dimostrazione del Teorema 19.0.2 si usano addirittura sei cammini contemporaneamente!)

(d2) Nel caso si tratti di cammini chiusi, è stato dimostrato che il prodotto di classi di cammini è un gruppo, quindi dalla proprietà associativa per tre fattori segue la proprietà associativa generalizzata, e anche in questo caso siamo a posto. Ma, di nuovo, nella dimostrazione del Teorema 19.0.2 si usano anche cammini che non sono chiusi.

(d3) Il problema possiede comunque una soluzione elegante, senza dover passare per i calcoli laboriosi accennati in (d1).

Supponiamo di nuovo di partire dai cammini $\gamma_A = ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4$ e $\gamma_B = \gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \gamma_4))$.

Per quanto dimostrato in (a) - (c), abbiamo $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \approx_{\{0,1\}} \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

Possiamo ottenere

$$(3) \quad ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4 \approx_{\{0,1\}} (\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)) * \gamma_4 ?$$

Sì, la dimostrazione è la stessa che trovate nella prima parte della dimostrazione del Teorema 18.2.4. Nel Teorema 18.2.4 si parla di cammini chiusi, ma l'ipotesi che i cammini siano chiusi non si usa per dimostrare che

$$(4) \quad \text{se } \delta'_1 \approx_{\{0,1\}} \delta_1 \text{ e } \delta'_2 \approx_{\{0,1\}} \delta_2, \text{ allora } \delta'_1 * \delta'_2 \approx_{\{0,1\}} \delta_1 * \delta_2$$

(qui abbiamo usato $\delta_1, \delta_2 \dots$ per non confonderci coi cammini introdotti precedentemente, e naturalmente supponiamo che $\delta'_1 * \delta'_2$ etc. siano definiti. L'equazione (3) segue dall'equazione che la precede e da (4) con $\delta_1 = \delta_2 = \gamma_4$, $\delta'_1 = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ e $\delta'_1 = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$).

Di nuovo applicando i risultati in (a) - (c), abbiamo

$$(\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)) * \gamma_4 \approx_{\{0,1\}} \gamma_1 * ((\gamma_2 * \gamma_3) * \gamma_4)$$

(dove stiamo considerando $\gamma_2 * \gamma_3$ "come un cammino unico", al posto di γ_2 in (a) - (c)).

Applicando ancora (a) - (c) e (4) otteniamo

$$\gamma_1 * ((\gamma_2 * \gamma_3) * \gamma_4) \approx_{\{0,1\}} \gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \gamma_4))$$

Mettendo insieme tutte le equazioni ottenute e per la proprietà transitiva della relazione di omotopia relativa, abbiamo

$$\gamma_A = ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) * \gamma_4 \approx_{\{0,1\}} \gamma_1 * (\gamma_2 * (\gamma_3 * \gamma_4)) = \gamma_B$$

Lo stesso discorso si può ripetere per un numero qualunque di fattori, e in qualunque modo vengano associati i cammini, sempre purché siano definiti.

(e) Naturalmente, nei commenti precedenti, il termine “associatività” deve essere interpretato con cautela. Di fronte ad un prodotto di un certo numero di cammini, possiamo sempre associare i fattori come preferiamo, *purché i prodotti siano definiti*. A meno che non ci si limiti considerare a cammini chiusi con lo stesso punto di partenza, in generale, il prodotto di cammini non è da considerare un’operazione perché non è sempre definito (alcuni autori parlano di *operazioni parziali*).