Se X è numerabilmente compatto e Y è compatto, allora $X \times Y$ è numerabilmente compatto.

(Da ricontrollare) Sia $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento numerabile di $X \times Y$.

Per ogni $x \in X$, siccome $\{x\} \times Y$ è omeomorfo ad Y ed Y è compatto, esiste un sottoinsieme finito $F_x \subseteq \mathbb{N}$ tale che $(V_n)_{n \in F_x}$ ricopre $\{x\} \times Y$. Prendendo $W_x = \bigcup_{n \in F_x} V_n$, il Tube Lemma garantisce che esiste un intorno aperto U_x di x tale che $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{n \in F_x} V_n$.

Al variare di x in X , la famiglia degli U_x ricopre X , ma non è detto che $(U_x)_{x \in X}$ sia una famiglia numerabile, quindi non possiamo applicare immediatamente la compattezza numerabile di X . Però, siccome l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$ è numerabile, possiamo unire a gruppi gli U_x che abbiamo ottenuto, in modo da ricavare un ricoprimento numerabile di X .

Quindi supponiamo di avere fissato, per ogni $x \in X$, un F_x e un U_x come sopra. Per ogni sottoinsieme finito F di $\mathbb{N}$ sia Z_F l'unione di tutti gli U_x per cui x è tale che $F_x = F$. Cioè, per ogni sottoinsieme finito F di $\mathbb{N}$, poniamo $Z_F = \bigcup_{F_x = F} U_x$.

Abbiamo che ogni Z_F è aperto, perchè unione di aperti. Inoltre la famiglia degli Z_F , al variare di F fra i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$, è un ricoprimento di X , perchè $x \in U_x$, per ogni $x \in X$ e ogni U_x è sottoinsieme di un qualche Z_F . Quindi, per la compattezza numerabile di X , esistono sottoinsiemi finiti $F^1, \dots, F^m$ di $\mathbb{N}$ tali che $Z_{F^1}, \dots, Z_{F^m}$ è un ricoprimento di X .

Ora basta controllare che, per ogni F finito, $Z_F \times Y$ è contenuto in un sottoinsieme finito di $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quindi $X \times Y = (Z_{F^1} \times Y) \cup \dots \cup (Z_{F^m} \times Y)$ è ricoperto da un sottoinsieme finito di $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Verifichiamo l'affermazione fatta in precedenza. Per ogni F finito abbiamo $Z_F \times Y \subseteq \bigcup_{n \in F} V_n$, poiché $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{n \in F_x} V_n$, per ogni x (vedi primo paragrafo), e stiamo considerando proprio gli x tali che $F_x = F$.