Funzioni immagine e preimmagine.

Se X è un insieme, $\mathcal{P}(X)$ indica l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.

Ad ogni funzione $f : X \to Y$ vengono associate due altre funzioni: la funzione *immagine* $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ e la funzione *preimmagine (o controimmagine, o immagine inversa)* $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. Spesso f_* si indica semplicemente con f. Di solito usare semplicemente f non comporta ambiguità, comunque qui per chiarezza useremo la notazione f_*. Chi legge può sempre sostituire f_* con f. Anche le notazioni per f^{-1} possono variare da autore ad autore.

La funzione immagine f_* è definita da

$f_*(A) = \{b \in Y \mid \text{ esiste un } a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$,

per ogni $A \subseteq X$, cioè $A \in \mathcal{P}(X)$.

La funzione preimmagine f^{-1} è definita da

$f^{-1}(B) = \{a \in X \mid f(a) \in B\}$,

per ogni $B \subseteq Y$, cioè $B \in \mathcal{P}(Y)$.

Alcune utili proprietà di f_* ed f^{-1} si possono trovare elencate nel testo di Checcucci et al. alle pagine 11 e 12. Le dimostrazioni sono facili, ad esempio, per dimostrare che $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ si può argomentare così.

$a \in f^{-1}(B \cap C)$ se e solo se

$f(a) \in B \cap C$ se e solo se

$f(a) \in B$ e $f(a) \in C$ se e solo se

$a \in f^{-1}(B)$ e $a \in f^{-1}(C)$ se e solo se

$a \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$. □

Oppure, per verificare che $f_*(A \cup D) = f_*(A) \cup f_*(D)$ si osserva che:

$b \in f_*(A \cup D)$ se e solo se

esiste $a \in A \cup D$ tale che $f(a) = b$ se e solo se

esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$, oppure esiste $a \in D$ tale che $f(a) = b$, se e solo se

$b \in f_*(A)$ oppure $b \in f_*(D)$, se e solo se

$b \in f_*(A) \cup f_*(D)$. □

Osserviamo che $f_*(A \cap D) \subset f_*(A) \cap f_*(D)$ vale sempre, ma non sempre è vero che $f_*(A \cap D) = f_*(A) \cap f_*(D)$.

Ad esempio, siano $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$ ed f sia data da $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 1$. Se $A = \{a, b\}$ e $D = \{a, c\}$, allora $f_*(A \cap D) = f_*(\{a\}) = \{f(a)\} = \{0\}$. Invece $f_*(A) = f_*(D) = \{0, 1\} = X$, quindi $f_*(A) \cap f_*(D) = X \neq \{0\}$. □

Come detto, rimandiamo al testo di Checcucci et al per ulteriori proprietà di queste funzioni.

Commento riservato ai più pignoli. Chi volesse spiegarsi le ragioni delle asimmetrie nel coportamento di f_* ed f^{-1} può osservare quanto segue. Nella definizione di f^{-1} non compaiono quantificatori; questo garantisce che f^{-1} preserva molte delle proprietà che collegano i sottoinsiemi dello spazio di arrivo.

Invece nella definizione di f_* compare il quantificatore "esiste". Nel dimostrare che $f_*(A \cup D) = f_*(A) \cup f_*(D)$ abbiamo implicitamente utilizzato il fatto che

esiste a tale che (P(a) oppure Q(a)) se e solo se

(esiste a tale che P(a)) oppure (esiste a tale che Q(a)),

dove P e Q sono affermazioni qualunque. L'equivalenza precedente non vale se al posto di "oppure" si sostituisce "e". Come usuale, "oppure" si interpreta nel senso inclusivo, cioè (P(a) oppure Q(a)) vale anche quando entrambe le affermazioni P(a) e Q(a) valgono.