Esercizi su prodotti liberi, Teorema di Seifert Van Kampen

(1) Il prodotto libero di una famiglia di gruppi dipende dall'ordine in cui sono elencati i gruppi?

In dettaglio, supponiamo che $(G_i)_{i\in I}$ sia una famiglia indicizzata di gruppi, $b : I \to J$ sia una biiezione, e $(H_j)_{j\in I}$ sia la famiglia tale che, se $b(i) = j$, allora $H_j = G_i$. È vero che il prodotto libero $*_{i\in I} G_i$ è uguale (o comunque isomorfo) al prodotto $*_{j\in J} H_j$?

(2) I prodotti liberi comprendono il caso di una famiglia finita. In questo caso il prodotto libero si scrive $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ (ad esempio, quest'ultima scrittura corrisponde al caso $I = \{1, \dots, n\}$).

Scrivere in forma ridotta i seguenti elementi di $G * H$, dove $g, g_1, \dots \in G$ e $h, \dots \in H$ ed e_G indica l'elemento neutro di G:

$ghh^{-1}h_1g^{-1}$, $\quad g_1ghe_Gh^{-1}g^{-1}h_1$, $\quad g_1g_2g_3g_4$

(3) Sia G un gruppo ciclico generato da un elemento di ordine 3, cioè $G = \{e, g, g^2\}$, e H generato da un elemento h di ordine 4. Calcolare (cioè scrivere in forma ridotta) in $G * H$

$g^2h^2h^2g$, $\quad ghghghg^2h^3$, $\quad hg^2h^2h^2ghg^2h^2h^2gh$

È finito $G * H$?

(4) Se H è il gruppo banale $H = \{e\}$, chi è $G * H$?

(5) Siano G e H due gruppi ciclici di ordine infinito. È vero che $G*H$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Esiste un omomorfismo iniettivo da $G * H$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Esiste un omomorfismo suriettivo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $G * H$?

(*) Esiste un omomorfismo suriettivo da $G * H$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

(*) Esiste un omomorfismo iniettivo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $G * H$?

(6) Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché $G * H$ sia abeliano. Quando $G * H$ è finito?

(7) È sempre vero che (l'immagine di) G è normale in $G * H$?

(8) È vero che se G ed H sono ciclici di ordine 2, allora ogni elemento di $G * H$ ha ordine 2?

(9) Trovare uno spazio X connesso per archi e due punti $x, y \in X$ tali che $X \setminus \{x\}$ e $X \setminus \{y\}$ sono ancora connessi per archi, ma hanno gruppi fondamentali diversi.

(Quando parliamo di "sfera meno un punto" o di "toro meno un punto" etc. il discorso non è ambiguo perchè le sfere e i tori sono *omogenei* cioè sono spazi X tali che per ogni coppia $x, y \in X$, allora esiste un omeomorfismo di X che manda x in y; in particolare, $X \setminus \{x\}$ e $X \setminus \{y\}$ sono omeomorfi).

(10) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, verificare che, se $n \geq 2$, allora S^n è semplicemente connesso.

(11) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale di 3 circonferenze C_1, C_2 e C_3 con C_2 tangente sia a C_1 che a C_3. In dettaglio:

$C_2 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

$C_1 = \{ (x, y) \mid (x + 2)^2 + y^2 = 1 \}$

$C_3 = \{ (x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1 \}$.

Generalizzare ad n circonferenze.

(12) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale del toro meno un punto (ad esempio, considerare il toro come un quadrato coi lati identificati e togliere i "quattro" punti agli angoli).
(13) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale dello spazio proiettivo bidimensionale (suggerimento: verificare che, togliendo un disco aperto allo spazio proiettivo, il sottospazio rimanente è isomorfo al nastro di Moebius. Togliere un disco corrisponde a togliere due calotte sferiche antipodali sufficientemente piccole ad S^2).
(14) (*) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen calcolare in altro modo il gruppo fondamentale del toro (usare 12).