

Esercizio 24.1.16. Se G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio $T_2 X$, allora l'azione è di rivestimento.

Sia $G = \{e, g_1, \dots, g_n\}$, $x \in X$ e siano $x_1 = \vartheta_{g_1}(x), \dots, x_n = \vartheta_{g_n}(x)$. Siccome ϑ è libera, $x, x_1, \dots, x_n$ sono a due a due distinti.

Siccome X è T_2 , allora, per ogni $i \leq n$, esistono intorno aperti U_i di x e V_i di x_i con $U_i \cap V_i = \emptyset$. Sia

$$U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \cap \vartheta_{g_1}^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \vartheta_{g_n}^{-1}(V_n)$$

U è un intorno aperto di x poiché intersezione finita di aperti che contengono x (qui usiamo l'ipotesi che G è finito). Inoltre, per ogni i , $U \subseteq U_i$ e inoltre $U \subseteq \vartheta_{g_i}^{-1}(V_i)$ quindi $\vartheta_{g_i}(U) \subseteq \vartheta_{g_i}(\vartheta_{g_i}^{-1}(V_i)) = V_i$.

Quindi, per ogni i , $U \cap \vartheta_{g_i}(U) \subseteq U_i \cap V_i = \emptyset$, quindi l'azione è di rivestimento.

Esercizi su prodotti liberi, Teorema di Seifert Van Kampen

- (1) Il prodotto libero di una famiglia di gruppi dipende dall'ordine in cui sono elencati i gruppi?

In dettaglio, supponiamo che $(G_i)_{i \in I}$ sia una famiglia indicizzata di gruppi, $b: I \rightarrow J$ sia una biiezione, e $(H_j)_{j \in J}$ sia la famiglia tale che, se $b(i) = j$, allora $H_j = G_i$. È vero che il prodotto libero $\ast_{i \in I} G_i$ è uguale (o comunque isomorfo) al prodotto $\ast_{j \in J} H_j$?

Gli elementi sono gli stessi (salvo precisazioni...)

- (2) I prodotti liberi comprendono il caso di una famiglia finita. In questo caso il prodotto libero si scrive $G_1 \ast G_2 \ast \dots \ast G_n$ (ad esempio, quest'ultima scrittura corrisponde al caso $I = \{1, \dots, n\}$).

Scrivere in forma ridotta i seguenti elementi di $G \ast H$, dove $g, g_1, \dots \in G$ e $h, \dots \in H$ ed e_G indica l'elemento neutro di G :

$$ghh^{-1}h_1g^{-1}, \quad g_1ghg^{-1}g^{-1}h_1, \quad g_1g_2g_3g_4 \longrightarrow \text{un elemento di } G$$

g_1h_1

- (3) Sia G un gruppo ciclico generato da un elemento di ordine 3, cioè $G = \{e, g, g^2\}$, e H generato da un elemento h di ordine 4. Calcolare (cioè scrivere in forma ridotta) in $G \ast H$

$$g^2h^2h^2g, \quad ghghghg^2h^3, \quad hg^2h^2h^2ghg^2h^2h^2gh$$

e semplificare h^3

È finito $G \ast H$?

No: esempio $g, gh, ghg, ghgh \dots$

- (4) Se H è il gruppo banale $H = \{e\}$, chi è $G \ast H$?

è (isomorfo a) G

- (5) Siano G e H due gruppi ciclici di ordine infinito. È vero che $G \ast H$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

No: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è abeliano, $G \ast H$ no, ad esempio g e h non commutano. Questo fornisce la risposta negativa anche ai prossimi due punti.

Esiste un omomorfismo iniettivo da $G \ast H$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Esiste un omomorfismo suriettivo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $G \ast H$?

(*) Esiste un omomorfismo suriettivo da $G \ast H$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Sì. Ad una parola p associo la coppia che ha come prima componente il prodotto (senza modificare l'ordine) di tutti gli elementi della parola che stanno in G e come seconda il prodotto di tutti gli elementi della parola

che stanno in H . (se non c'è nessun elemento in G nella parola, considero l'elemento neutro.) Ottengo $G \times H$, che è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(*) Esiste un omomorfismo iniettivo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $G * H$?

- (6) Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché $G * H$ sia abeliano.

G abeliano e $H = \{e\}$ o viceversa.

Quando $G * H$ è finito?

G finito e $H = \{e\}$ o viceversa.

- (7) È sempre vero che (l'immagine di) G è normale in $G * H$?

Mai, tranne il caso in cui G o H hanno solo un elemento.

- (8) È vero che se G ed H sono ciclici di ordine 2, allora ogni elemento di $G * H$ ha ordine 2?

No, gh ha ordine infinito.

- (9) Trovare uno spazio X connesso per archi e due punti $x, y \in X$ tali che $X \setminus \{x\}$ e $X \setminus \{y\}$ sono ancora connessi per archi, ma hanno gruppi fondamentali diversi.

D^2 , x un punto del bordo, y un punto dell'interno.

(Quando parliamo di "sfera meno un punto" o di "toro meno un punto" etc. il discorso non è ambiguo perchè le sfere e i tori sono *omogenei* cioè sono spazi X tali che per ogni coppia $x, y \in X$, allora esiste un omeomorfismo di X che manda x in y ; in particolare, $X \setminus \{x\}$ e $X \setminus \{y\}$ sono omeomorfi).

- (10) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, verificare che, se $n \geq 2$, allora S^n è semplicemente connesso.

$U = S^n$ meno polo nord, $V = S^n$ meno polo sud, entrambi semplicemente connessi.

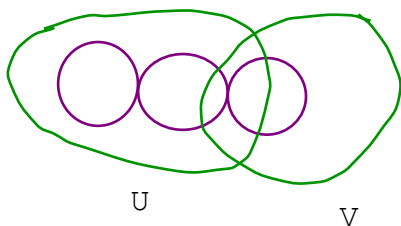
- (11) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale di 3 circonferenze C_1 , C_2 e C_3 con C_2 tangente sia a C_1 che a C_3 . In dettaglio:

$$C_2 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$C_1 = \{ (x, y) \mid (x+2)^2 + y^2 = 1 \}$$

$$C_3 = \{ (x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 = 1 \}.$$

Generalizzare ad n circonferenze.



$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$



$U \cap V$

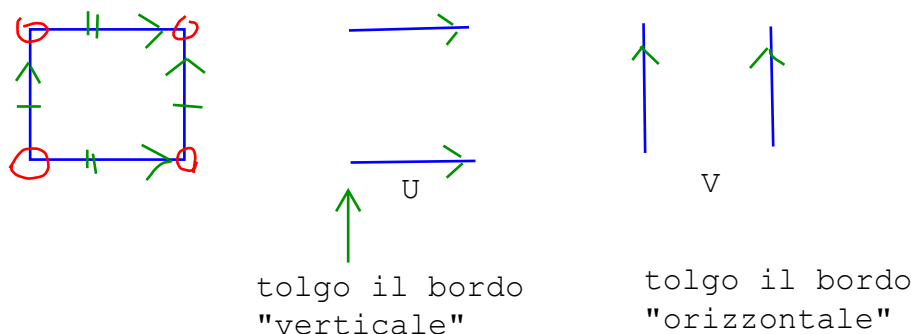
contraibile

quindi

semplicemente connesso

quindi è $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}$ cioè $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

- (12) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale del toro meno un punto (ad esempio, considerare il toro come un quadrato coi lati identificati e togliere i “quattro” punti agli angoli).



U e V sono entrambi cilindri, quindi il gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}$; $U \cap V$ è l'interno del quadrato, quindi semplicemente connesso; in conclusione il gruppo fondamentale del toro meno un punto è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Pensando il toro come realizzato nello spazio

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Torus_cycles.png

U è il toro meno la circonferenza rossa,

V è il toro meno la circonferenza violetta

(entrambi sono cilindri), e $U \cup V$ è il toro meno il punto di intersezione delle due circonferenze.

Un altro modo per svolgere l'esercizio è di considerare un punto P del toro che non sta in nessuna delle due circonferenze e vedere che l'unione delle due circonferenze è un retrato di deformazione del toro meno P. Considerando il toro come identificazione del quadrato, prendiamo P come centro del quadrato, possiamo proiettare tutti gli altri punti verso il bordo e otteniamo due circonferenze che si intersecano in un punto (perchè?)

- (13) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale dello spazio proiettivo bidimensionale (suggerimento: verificare che, togliendo un disco aperto allo spazio proiettivo, il sottospazio rimanente è isomorfo al nastro di Moebius. Togliere un disco corrisponde a togliere due calotte sferiche antipodali sufficientemente piccole ad S^2).
vedi Kosniowski p. 33
<https://www.math3ma.com/blog/the-fundamental-group-of-the-real-projective-plane>

- (14) (*) Usando il Teorema di Seifert Van Kampen calcolare in altro modo il gruppo fondamentale del toro (usare 12).

http://www.mat.uniroma2.it/~lipparin/stud/AA1112/es11_1.html