Esercizi proposti sulle dispense.

(1) Verifica che la funzione r è continua nella dimostrazione del Corollario 22.1.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer).

Un'equazione parametrica per la retta che passa per $f(x)$ ed x è
$(1-t)f(x) + tx$, (disegni sul Kosniowski)
infatti per $t = 0$ ottengo $f(x)$ e per $t = 1$ ottengo x. Per la semiretta che parte da $f(x)$ devo quindi considerare i valori di t che sono > 0.

Interseco con S^1, cioè chiedo che il modulo (equivalentemente, il quadrato del modulo) sia 1, cioè
$|(1-t)f(x) + tx|^2 = |f(x) + t(x - f(x)|^2 = 1$.

Per semplifiare le formule, sia $v = f(x)$, $w = x - f(x)$ (NB: per ipotesi, w è diverso da 0, perchè suppongo $x \neq f(x)$) quindi chiedo
$|v + tw|^2 - 1 = |v|^2 + t^2|w|^2 + 2t\langle v, w\rangle - 1 = 0$, riordinando,
$t^2|w|^2 + 2t\langle v, w\rangle + |v|^2 - 1 = 0$. v1w1+v2w2

Ho un'equazione di secondo grado, chiamo A, $2B$ e C i coefficienti. Ho $A > 0$, per il commento sopra, e $C \leq 0$, poiché $v = f(x)$ sta in D^2, quindi $-AC$ è positivo o nullo. La radice maggiore dell'equazione quindi è

$$t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

La formula ha sempre senso poiché $A > 0$ (cioè l'equazione è sempre di secondo grado), il risultato è reale perchè, come detto, $-AC \geq 0$, e questo implica anche che la soluzione è positiva. Ho che t, come funzione di x, è continua, perchè composizione di funzioni continue, quindi anche $r(x) = (1-t)f(x) + tx$ è continua.

(2) Esercizio all'interno della dim. del Corollario 22.1.8 (Teorema fondamentale dell'algebra).

Dato
$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, nuova variabile
col cambio di variabili $z = cw$ ho c parametro
$q(w) = p(cw) = c^n w^n + a_{n-1}c^{n-1}w^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2}w^{n-2} + \cdots + a_0$.
(dunque w è un radice di q se e solo se cw è una radice di p)

Se rendo q monico, le radici sono le stesse, quindi considero il polinomio

$$w^n + \frac{a_{n-1}}{c}w^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{c^2}w^{n-2} \cdots + \frac{a_0}{c^n} \tag{1}$$

Se $a = \max |a_i|$, mi basta prendere c tale che $|c| > (n-1)a$ e $|c| > 1$ allora il modulo di ogni coefficiente (salvo quello di grado massimo) del polinomio (1) è $< \frac{1}{n-1}$, quindi la somma di questi moduli è < 1.

(3) Esercizio nella dimostrazione del Teorema 22.2.4.

Sia $[\tilde{\delta}]$ un elemento di $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e sia $[\delta] = p_*([\tilde{\delta}]) = [p \circ \tilde{\delta}]$. Per definizione, $\varphi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{\delta}]) = [\tilde{\gamma} * \tilde{\delta} * \bar{\tilde{\gamma}}]$, quindi
$p_*(\varphi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{\delta}])) = p_*([\tilde{\gamma} * \tilde{\delta} * \bar{\tilde{\gamma}}]) = [p \circ (\tilde{\gamma} * \tilde{\delta} * \bar{\tilde{\gamma}})] = [(p \circ \tilde{\gamma}) * (p \circ \tilde{\delta}) * (p \circ \bar{\tilde{\gamma}})] = [\gamma * \delta * \bar{\gamma}] = \varphi_\gamma([\delta]) = \varphi_\gamma(p_*([\tilde{\delta}]))$,