

- (1) Dare l'esempio di una funzione continua  $f$  da  $D^2$  a  $D^2$  tale che  $f$  non ha nessun punto fisso nell'interno di  $D^2$ , cioè tale che non esiste un punto  $x$  per cui  $|x| < 1$  e  $f(x) = x$ .

*Ad esempio, una funzione costante verso un punto del bordo.*

- (2) Dare l'esempio di una funzione continua da  $[0, 1]$  a  $[0, 1]$  senza punto fisso.

*Ad esempio:  $x$  va in  $1/2 + x/2$*

*Se  $x = 1/2 + x/2$  allora  $2x - x = 1$ , cioè  $x = 1$  non nel dominio.*

*Esercizio ulteriore: esiste una tale funzione suriettiva?  $\checkmark \rightarrow$  sarebbe punto fisso*

- (3) Sia  $X$  l'interno di  $D^2$ , cioè  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ . Trovare una funzione continua  $f : X \rightarrow X$  che non ha un punto fisso.

*Ad esempio,  $(x, y) \mapsto (1/2 + x/2, 0)$ , calcoli come sopra.*

- $\rightarrow$  *Esercizio ulteriore: esiste una tale funzione suriettiva?*

- (4) Trovare una funzione continua da  $S^1$  in  $S^1$  senza punto fisso.

*Una qualunque rotazione di un angolo non multiplo di  $2\pi$*

- (5) Dare l'esempio di uno spazio topologico  $X$  semplicemente connesso e di un punto  $x \in X$  tale che  $X \setminus \{x\}$  è connesso per archi, ma non semplicemente connesso.

*$\mathbb{R}^2$  un qualunque punto*

Dare l'esempio di uno spazio topologico  $X$  connesso per archi ma non semplicemente connesso per cui esiste un punto  $x \in X$  tale che  $X \setminus \{x\}$  è semplicemente connesso.

*$S^1$  meno un punto è omeomorfo ad un intervallo aperto.*

- (6) È vero che se  $X$  è semplicemente connesso, allora anche ogni suo quoziente è semplicemente connesso?

*NO:  $S^1$  è un quoziente di  $\mathbb{R}$ .*

- (7) È possibile calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio  $X$  con la topologia indiscreta?

*Ovviamente sì!*

*Ogni funzione verso  $X$  è continua, quindi tutte le funzioni da  $[0, 1]$  a  $X$  sono cammini e tutte le funzioni da  $[0, 1] \times [0, 1]$  a  $X$  sono omotopie, quindi il gruppo fondamentale è banale.*

- (8) È vero che se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua e suriettiva e  $x \in X$ , allora  $f_*$  è suriettiva?

*No:  $X = \mathbb{R}$  ad  $Y = S^1$ ; il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}$  è banale, quindi l'immagine è banale, ma il gruppo fondamentale di  $S^1$  non è banale*

*È vero che se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua ed iniettiva e  $x \in X$ , allora,  $f_*$  è iniettiva?*

*No: ad esempio l'inclusione da  $S^1$  in  $\mathbb{R}$ .*

- (9) Se  $X$  non è compatto e, per ogni  $x \in X$ , si ha che  $X \setminus \{x\}$  è semplicemente connesso, segue che  $X$  è semplicemente connesso?

*Sì: se  $\gamma$  è un cammino, la sua immagine è compatta, quindi non è tutto  $X$ , sia  $x$  non appartenente all'immagine di  $\gamma$ , quindi  $\gamma$  è omotopo al cammino costante in  $X \setminus \{x\}$ , ma allora la stessa omotopia funziona anche per  $X$  (basta comporre con l'inclusione)*

- (10) Verificare che se  $x \in S^2$ , allora  $S^2 \setminus \{x\}$  è semplicemente connesso.

$S^2$  meno un punto è omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , che è semplicemente connesso, ed essere semplicemente connessi è invariante per omeomorfismi.

\* Dall'osservazione precedente segue che  $S^2$  è semplicemente connesso?

Per cammini che non sono suriettivi (non coprono tutta  $S^2$ ) sì (cf. esercizio precedente), ma esistono cammini la cui immagine è tutta  $S^2$  (cf. la curva di Peano).  $S^2$  è effettivamente semplicemente connesso, ma sono necessari argomenti ulteriori per dimostrarlo.

- (11) Se  $x \neq y \in S^2$ , allora  $S^2 \setminus \{x, y\}$  è connesso per archi, ma non è semplicemente connesso.

$S^2$  meno un punto è omeomorfo ad  $\mathbb{R}^2$ , quindi  $S^2$  meno due punti è omeomorfo ad  $\mathbb{R}^2$  meno un punto e tutte le proprietà considerate sono invarianti per omeomorfismo.

- (12) Per ogni  $n \geq 2$  il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  è isomorfo al gruppo fondamentale di  $S^{n-1}$  (qui e nel seguito trattiamo di spazi topologici connessi per archi, quindi il gruppo fondamentale, a meno di isomorfismo, non dipende dal punto scelto).

*Dimostrazione come corollario 22.1.2*

- (13) Determinare il gruppo fondamentale di  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0\}$  ( $\mathbb{R}^3$  meno una retta).

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  è omeomorfo al sottospazio  $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \neq (0, 0), z = 0\}$  di  $X$ .

$Y$  è un retratto di deformazione di  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0\}$ , come verificato da  $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ .

Un'omotopia dall'identità ad  $i \circ r$  è data da

$$F((x, y, z), t) = (x, y, (1-t)z).$$

Quindi il gruppo fondamentale di  $X$  è isomorfo al gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , che è isomorfo al gruppo fondamentale di  $S^1$ , cioè  $\mathbb{Z}$ .

In generale, per  $n \geq 3$ , determinare il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$  ( $\mathbb{R}^n$  meno un sottospazio di dimensione  $n-2$ ).

Come sopra,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  è omeomorfo al sottospazio  $Y = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_3 = x_4 = \dots = 0\}$  di  $X$ .

Usare  $r(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x, y, 0, \dots, 0)$ .

Un'omotopia dall'identità ad  $i \circ r$  è data da

$$F((x_1, x_2, x_3, \dots), t) = (x_1, x_2, (1-t)x_3, \dots, (1-t)x_n).$$

Quindi anche in questo caso il gruppo fondamentale è isomorfo al gruppo fondamentale di  $S^1$ , cioè  $\mathbb{Z}$ .

- (14) Il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^4 \setminus \{(x, y, z, w) \mid x = 0, y = 0, z = 0\}$  ( $\mathbb{R}^4$  meno una retta) è isomorfo al gruppo fondamentale di  $S^2$ .

Analogamente a sopra,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  (come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$ ) è un retratto di deformazione di  $\mathbb{R}^4 \setminus \{(x, y, z, w) \mid x = 0, y = 0, z = 0\}$ . Usare  $r(x, y, z, w) = (x, y, z, 0)$ .

- (15) Dando per noto che  $S^2$  è semplicemente connesso, verificare che  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, S^1, S^2$  e  $S^3$  sono a due a due non omeomorfi chiusi e limitati di  $\mathbb{R}^m$

Gli ultimi 3 sono compatti, i primi 3 no, quindi non sono omeomorfi.

Togliendo un punto ad  $\mathbb{R}$  si sconnette, quindi non è omeomorfo né ad  $\mathbb{R}^2$  né a  $\mathbb{R}^3$ . Togliendo un punto ad  $\mathbb{R}^2$  non è più semplicemente connesso. Togliendo un punto ad  $\mathbb{R}^3$  ottengo uno spazio omotopo ad  $S^2$ , quindi

semplicemente connesso.

Togliendo un punto a  $S^1$ ,  $S^2$  e  $S^3$  ottengo spazi omeomorfi a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , quindi  $S^1$ ,  $S^2$  e  $S^3$  sono a due a due non omeomorfi. (ovviamente,  $S^1$  non è semplicemente connesso, quindi non omeomorfo a  $S^2$  e nemmeno ad  $S^3$ )

- (16) Se  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora esistono due punti diametralmente opposti di  $S^1$  in cui  $f$  assume lo stesso valore, cioè esiste  $x \in S^1$  tale che  $f(x) = f(-x)$ . (Suggerimento: considerare la funzione  $g(x) = f(x) - f(-x)$  e comporla con la funzione  $h : [0, 1] \rightarrow S^1$  data da  $h(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ ).

Vale  $h(0) = (1, 0) = -h(1)$ , sia  $c = h(0)$  quindi  $-c = h(1)$  e  $g(c) = f(c) - f(-c) = -(f(-c) - f(c)) = -g(-c)$ , cioè  $g(h(0)) = -g(h(1))$ . Quindi  $g(h(t)) = 0$  per qualche  $t \in [0, 1]$  quindi  $f(h(t)) - f(-h(t)) = 0$  cioè  $f(h(t)) = f(-h(t))$ , quindi  $f(x) = f(-x)$  per  $x = h(t)$ .

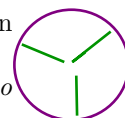
hog continua

per teorema  
valor medio

- (17) Si può generalizzare l'esercizio precedente nel seguente modo?

Se  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora esistono tre punti in  $S^1$  che formano un triangolo equilatero e tali che  $f$  assume lo stesso valore in quei punti?

No, ad esempio, la prima proiezione non assume mai per tre volte lo stesso valore!

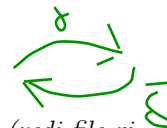


- (18) (a) Se  $X = U \cup V$  con  $U$  e  $V$  aperti, e  $\gamma$  è un cammino in  $X$  da  $x$  a  $y$ , allora esiste un numero finito di cammini  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  tali che  $\gamma$  è omotopo a  $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$  relativamente ad  $\{x, y\}$  e (l'immagine di) ciascun  $\gamma_i$  è contenuto in  $U$  oppure è contenuto in  $V$ . (Suggerimento: esprimere  $\gamma^{-1}(U)$  e  $\gamma^{-1}(V)$  come unione di intervalli aperti ed usare la compattezza di  $[0, 1]$ . Poi esprimere  $\gamma$  come riparametrizzazione del prodotto di opportuni cammini). (posso usare anche Lebesgue) Quindi ho intervalli aperti  $[0, b_1], (a_2, b_2), (a_3, b_3) \dots$  che ricoprono  $[0, 1]$  e ciascun intervallo è contenuto in  $U$  oppure in  $V$ . Ordino gli intervalli, cioè suppongo  $a_2 < b_1, a_3 < b_2 \dots$ , scelgo  $c_1, c_2 \dots$  con  $a_2 < c_1 < b_1, a_3 < c_2 < b_2 \dots$  quindi  $[0, c_1], [c_1, c_2] \dots$  ricoprono  $[0, 1]$  e ciascun intervallo è contenuto in  $U$  oppure in  $V$ . Prendo  $\gamma_1$  una riparametrizzazione di  $\gamma$  ristretto a  $[0, c_1]$  e così via.

- (b) Se  $U$  è semplicemente connesso e  $x, y \in U$ , allora due qualunque cammini da  $x$  ad  $y$  sono omotopicamente equivalenti relativamente ad  $\{x, y\}$ .

Siano  $\gamma$  e  $\delta$  cammini da  $x$  ad  $y$ , allora

$$[\gamma] \approx [\gamma * e_y] \approx [\gamma * \bar{\delta} * \delta] \approx [e_x * \delta] \approx [\delta]$$



dove abbiamo usato la proprietà associativa generalizzata (vedi file ri-par.pdf) e nella penultima equivalenza abbiamo che  $\gamma * \bar{\delta} \approx e_x$  poiché  $U$  è semplicemente connesso e  $\gamma * \bar{\delta}$  è un cammino chiuso.

- (c) Dedurre da (a) e (b) che se  $X = U \cup V$  con  $U, V$  aperti e semplicemente connessi e  $U \cap V$  è non vuoto e connesso per archi, allora  $X$  è semplicemente connesso.

Siccome  $U$  e  $V$  sono connessi per archi, allora  $X$  è connesso per archi, poiché  $X = U \cup V$  e  $U \cap V$ .

Sia  $\gamma$  cammino chiuso; poiché  $X$  è connesso per archi, per calcolare il gruppo fondamentale possiamo supporre che il punto base sia in  $U \cap V$ . Per (a),  $\gamma$  è omotopo a  $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$  relativamente ad  $\{x\}$ , e ciascun  $\gamma_i$  è contenuto in  $U$  oppure in  $V$ . Non perdo in generalità supponendo che i cammini contenuti in  $U$  e in  $V$  si alternano, quindi,

- se  $\gamma_i$  ( $0 < i < n$ ) va da  $x_i$  ad  $x_{i+1}$ , allora  $x_i, x_{i+1} \in U \cap V$ . Siccome  $U \cap V$  è connesso per archi, per ogni  $i$ , esiste un cammino  $\gamma'_i$  da  $x_i$  ad  $x_{i+1}$  contenuto in  $U \cap V$ . Se  $\gamma_i$  è contenuto in  $U$ , allora, siccome  $U$  è semplicemente connesso, posso usare (b) per sostituire  $\gamma_i$  con  $\gamma'_i$ . Il cammino che ottengo sta tutto in  $V$ , ma  $V$  è semplicemente connesso, quindi il cammino è omotopo al cammino identico. ( $\gamma'_2$  e  $\gamma'_4$  sono disegnati come cammini tratteggiati nel disegno in (a).)
- (d) In particolare, se  $n \geq 2$ , allora  $S^n$  è semplicemente connesso. Prendo  $U$  come  $S^n$  meno il polo nord,  $V$  come  $S^n$  meno il polo sud (andrebbero bene due punti distinti qualunque)
- (e) L'ipotesi che  $U \cap V$  sia connesso per archi è necessaria in (c)?  
 Sì,  $X = S^1$ ,  $U = S^1 \setminus \{a\}$ ,  $V = S^1 \setminus \{b\}$ , con  $a$  e  $b$  punti distinti;  $U$  e  $V$  sono semplicemente connessi ma  $S^1$  non è semplicemente connesso. L'ipotesi che  $U \cap V$  sia non vuoto è necessaria?  
 Sì, perchè nella definizione di semplicemente connesso richiedo la connessione per archi. (Però, comunque, anche senza l'ipotesi ogni componente connessa per archi sarebbe semplicemente connessa.)