

- (1) È vero che ogni spazio compatto per successioni è numerabilmente compatto?

Sì, osservazione 12.1.6 delle dispense.

- (2) Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea sono chiusi o aperti. Quali sono compatti? Quali connessi? per archi?

(a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$; Chiuso: controimmagine del chiuso $\{1\}$ secondo una funzione continua. Compatto perchè sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso e limitato. Connesso (anche per archi) perchè immagine di connesso per archi: la funzione da $[0, 1]$ che manda t in $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Non aperto, perchè ogni intorno di (ciascun) punto... oppure perchè $\mathbb{R}^2$ connesso

(b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$; Aperto perchè controimmagine dell'aperto $(-1, 1)$. O semplicemente perchè è una palla della metrica. Non chiuso perchè $(0, 1)$ appartiene alla chiusura ma non all'insieme, quindi non compatto. Connesso (anche per archi): dati due punti distinti, se il segmento che li unisce non passa per l'origine è un cammino; altrimenti scelgo un altro punto che non sta nel segmento e li congiungo entrambi a quello. Oppure $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$ è connesso (per archi, come sopra) e considero i "raggi" quindi unione di connessi disgiunti...

è connesso
perchè
convesso

qui qualunque
numero
negativo
andava bene!

(c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$; non aperto: ogni intorno di $(0, 1)$... Non chiuso: $(0, 0)$ sta nella chiusura...

(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$; aperto: controimmagine di $(0, 1)$ intervallo

(e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 0\}$; non aperto: ogni intorno di $(0, 2)$... non chiuso: $(1, 0)$ sta nella chiusura... connesso (anche per archi): unione di due connessi che si intersecano.)

(f) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 2\}$; chiuso (unione di due chiusi); non connesso: le intersezioni con i due semipiani aperti $\{(x, y) \mid x < \frac{1}{2}\}$ e $\{(x, y) \mid x > \frac{1}{2}\}$ lo sconnettono.

- (3) Se X non è connesso e Y è un sottospazio di X , è sempre vero che Y non è connesso? Assumendo che Y sia aperto? Chiuso? Assumendo qualche assioma di separazione?

Tutte false. Ad esempio $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $Y = [0, 1]$, O anche solo X con topologia discreta e almeno due punti, Y un punto.

Nessun sottospazio di $\mathbb{Q}$ (con la topologia indotta dalla topologia euclidea) con almeno due punti è connesso. *Esercizio 16.1.4* totalmente disconnesso

Nessun sottospazio della retta di Sorgenfrey con almeno due punti è connesso.

Se $x < y \in X$ e $x < r < y$, allora $(\infty, r) \cap X$ e $[r, \infty)$ sono aperti non vuoti e disgiunti di X .

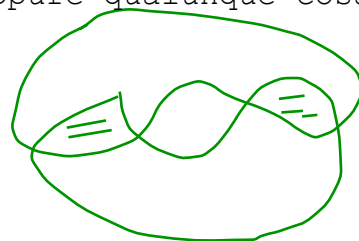
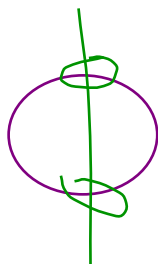
- (4) È vero che l'intersezione di due sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ è connesso?

Sì, l'intersezione di due intervalli (convessi, in questo caso) è ancora un intervallo.

È vero che l'intersezione di due sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}^2$ è connesso?

No: S^1 e l'asse delle x .

oppure qualunque cosa di questo tipo:



oppure
immagine
di
qualche
connesso,
come?

- (5) Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dice convesso se, dati due punti $x, y \in X$, il segmento che congiunge x e y è contenuto in X .

Quali sono i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$?

sono quelli che nelle dispense vengono chiamati intervalli

L'unione di due sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ è convessa?

No, un punto è un convesso, ma l'insieme costituito da due punti distinti non è convesso.

L'unione di due sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ con intersezione diversa dal vuoto è convessa?

No, se $n \geq 2$ ad esempio due rette distinte per l'origine.

Nel caso $n = 1$?

Sì, l'unione di intervalli non disgiunti è un intervallo.

L'intersezione?

Intersezione di convessi è sempre convessa.

Un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso?

Proposizione 15.1.17. Anche connesso per archi, stessa dimostrazione.

L'unione di due sottoinsiemi convessi è connesso?

No, come sopra, due punti distinti

L'unione di due sottoinsiemi convessi con intersezione non vuota è connesso?

Sì, perchè unione di due connessi con intersezione non vuota. Quindi anche connesso per archi. ma non necessariamente convessa, come sopra.

L'intersezione di due sottoinsiemi convessi è connesso?

Sì, è convessa.

- (6) Uno spazio X tale che ogni punto di X ha un intorno connesso non è necessariamente connesso.

Come sopra, $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ o anche solo X con topologia discreta e almeno due punti.

- (7) Se X e Y sono spazi topologici, conoscendo le componenti connesse di X e Y sapreste determinare le componenti connesse di $X \times Y$? Dell'unione disgiunta $X \cup Y$?

Sono gli $A \times B$ con A componente connessa di X e B componente connessa di Y . Sicuramente $A \times B$ è connesso, perchè prodotto di connessi. È un connesso massimale, perchè se $C \supset A \times B$ strettamente, c'è $(x, y) \in C$ con $x \notin A$ oppure $y \notin B$, supponiamo $x \notin A$, allora $\pi(C) \supset A \cup \{x\}$ connesso strettamente più grande di A , dunque A non sarebbe una componente connessa.

Per l'unione disgiunta sono le stesse.

- (8) Esiste uno spazio infinito totalmente disconnesso e compatto?

Sì, lo spazio di Cantor, esercizio 16.1.7

- (9) Se C è una componente connessa di X , è vero che C è anche una componente connessa della sua compattificazione di Alexandroff?

No, ad esempio, la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}$ è connessa (omeomorfa ad S^1) quindi $\mathbb{R}$ non è più una componente connessa.

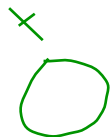
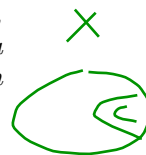
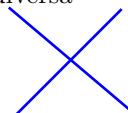
Oppure $X = [0, 1] \cup (1, 2]$, due componenti connesse. Per la Proposizione 14.2.8, la compattificazione di Alexandroff di X è $[0, 2]$, un'unica componente connessa.

omeomorfa a

Però in generale alcune componenti connesse possono restare componenti nella compattificazione.

Ad esempio $X = [0, 1] \cup (2, 3)$

in questo caso $[0, 1]$ resta una componente connessa



- (10) (a) Se X è connesso, la sua compattificazione di Alexandroff è connessa?

[[NB: Nella definizione di compattificazione di Alexandroff si suppone che X non sia compatto. Se X fosse compatto, la definizione avrebbe senso ma darebbe ∞ punto isolato, e quindi X non denso in X^ .]]*

Se X non compatto, e per assurdo A, B sono aperti disgiunti che coprono X^ , allora $\infty \in A$ oppure in B , diciamo $\infty \in A$. Se X non compatto $A \cap X \neq \emptyset$, quindi $A \cap X$ e B sono aperti disgiunti non vuoti che coprono X , assurdo.*

- (b) Se la compattificazione di Alexandroff di X è connessa, allora X è connesso? *No, come sopra, $[0, 1) \cup (1, 2]$*
- (c) Assumendo qualche assioma di separazione? ~~Qualche altra ipotesi su X ?~~

- (11) Esiste uno spazio connesso per archi che contiene un sottospazio chiuso omeomorfo allo spazio di Cantor?

Lavoro in $\mathbb{R}^2$ scelgo un punto P non nell'asse delle x e considero tutti i segmenti che uniscono P allo spazio di Cantor.

- (12) Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua.

Esiste $x \in [0, 1]$ tale che $x - f(x) \geq 0$. se $x = 1$, $f(x) \leq 1$

Esiste $x \in [0, 1]$ tale che $x - f(x) \leq 0$. se $x = 0$, $f(x) \geq 0$

Esiste $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = x$. (è il teorema di punto fisso per $[0, 1]$)

se per assurdo non esistesse, per sopra la funzione $g(x) = x - f(x)$ assume sia un valore negativo che un valore positivo. Ma g è continua, $[0, 1]$ è un connesso, quindi $g([0, 1])$ è un connesso, quindi un intervallo, quindi $g(x) = 0$ per qualche x . Quindi $x - f(x) = 0$ cioè $f(x) = x$.

(ho semplicemente riscritto la dimostrazione della Proprietà dei valori intermedi)

