Esercizi su compattificazioni (21 Novembre 2020)

Ricordiamo che se X è un sottospazio di uno spazio Y, allora Y si dice una *compattificazione*[1] di X se Y è compatto e X è denso in Y.

(1) Dare l'esempio di un insieme X con due distanze d_1 e d_2 definite su X tali che d_1 e d_2 inducono la stessa topologia su X ma (X, d_1) è totalmente limitato mentre (X, d_2) non è totalmente limitato.

(In altre parole, la totale limitatezza è una nozione metrica ma non topologica.)

Osserviamo che $(0,1)$ *e* $\mathbb{R}$ *sono omeomorfi, ma* $(0,1)$ *totalmente limitato* $\mathbb{R}$ *no, per 13.1.8. In dettaglio, sia* $X = (0,1)$*, sia* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *un omeomorfismo,* d_1 *la distanza euclidea,* $d_2(x,y) = d(f(x), f(y))$ *con* d *distanza euclidea su* $\mathbb{R}$*. Quindi* $(0,1)$ *con* d_2 *ha le stesse proprietà metriche di* $\mathbb{R}$*.*

(2) Se su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisce la distanza discreta (tutti i punti distinti hanno distanza 1), allora $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ è uno spazio metrico completo.

osservato nelle dispense: le uniche successioni di Cauchy sono quelle costanti da un certo punto in poi.

Se su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisce la seguente distanza: $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, allora $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ non è uno spazio metrico completo.

La successione $\frac{1}{n}$ *è di Cauchy, ma non converge.*

Quindi nemmeno la completezza è una proprietà topologica.

(3) Se X è un sottospazio di Y e Y è compatto, esiste una compattificazione di X contenuta in Y?

in K

Sì, la chiusura K *di* X *è compatta e* X *è denso per costruzione*

(4) Esiste una compattificazione di $[0,1] \cap \mathbb{Q}$? Esiste una compattificazione che sia T_2?

Sì: $[0,1]$

(5) Se X è compatto e T_2, allora X stesso è l'unica compattificazione di X che è T_2.

Compatto in T_2 *è chiuso, quindi se* Y *è* T_2 *compatto e contiene propriamente* X *la chiusura di* X *è* X *contenuta propriamente in* Y*, quindi* X *non è denso*

Sapreste trovare una compattificazione di X *compatto che estende propriamente* X*?*

(6) Siano Y_1 una compattificazione di X_1 e Y_2 una compattificazione di X_2,

(a) È vero che $Y_1 \times Y_2$ è una compattificazione di $X_1 \times X_2$?

equivalentemente, ogni aperto non vuoto

Sì: $Y_1 \times Y_2$ *è compatto perchè prodotto di compatti. Ogni intorno di un punto di* $Y_1 \times Y_2$ *contiene un aperto del tipo* $A \times B$ *con* A *e* B *aperti; siccome* X_1 *è denso* $A \cap X_1 \neq \emptyset$*...*

(b) È vero che se Y_1 e Y_2 sono disgiunti, allora $Y_1 \cup Y_2$ è una compattificazione di $X_1 \cup X_2$? (la topologia sull'unione è la topologia dell'unione disgiunta)?

Sì, $Y_1 \cup Y_2$ *compatto perchè unione di un numero finito di compatti...*

(c) Se Y_1 e Y_2 sono le compattificazioni di Alexandroff di X_1 e X_2, allora è vero che $Y_1 \times Y_2$ è la compattificazione di Alexandroff di $X_1 \times X_2$? *In*

[1]Più in generale, a volte si chiama compattificazione una coppia (Y, f), dove Y è compatto ed f è un omeomorfismo di X in $f(X)$, considerato come sottospazio di Y. Il caso che abbiamo considerato è quello in cui f è l'inclusione.

generale, no. La compattificazione di Alexandroff è ottenuta aggiungendo solo un punto, ma in generale la cardinalità di $Y_1 \times Y_2 \setminus X_1 \times X_2$ è maggiore di 1. Se $Y_1 = X_1 \cup \{\infty_1\}$, allora $Y_1 \times Y_2 \setminus X_1 \times X_2$ contiene tutto $\{\infty_1\} \times Y_2$ etc. L'unico caso sarebbe X1=X2=vuoto, ma allora X1 e X2 sono già compatti

(d) Se Y_1 e Y_2 sono le compattificazioni di Alexandroff di X_1 e X_2, allora è vero che $Y_1 \cup Y_2$ è la compattificazione di Alexandroff di $X_1 \cup X_2$?
No: $(Y_1 \times Y_2) \setminus (X_1 \cup X_2)$ ha cardinalità 2

(7) Uno spazio con la topologia discreta è localmente compatto.
Per ogni punto x il singoletto $\{x\}$ è un intorno compatto

(8) Se X è localmente compatto, allora ogni sottoinsieme chiuso (con la topologia di sottospazio) è localmente compatto.
Sia Y chiuso in X e $y \in Y$. Allora y ha un intorno K compatto, intorno di y in X. Ma $Y \cap K$ è chiuso in K, quindi compatto quindi $Y \cap K$ è un intorno compatto di x in Y.
È vero per qualunque sottoinsieme (cioè senza assumere che sia chiuso)?
No: $\mathbb{Q}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$

(9) È vero che il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto? L'unione disgiunta?
Sì. Se $(x, y) \in X \times Y$ x ha un intorno compatto in X *K, y ha un intorno compatto H e $H \times K$ è un intorno compatto di (x, y). Nel caso dell'unione disgiunta basta prendere lo stesso intorno che funziona in X o Y.*

(10) Se $(X_i)_{i\in I}$ è una famiglia di spazi topologici non vuoti e $\prod_{i\in I} X_i$ è localmente compatto, allora tutti gli X_i sono compatti tranne al più un numero finito. (Suggerimento: usare le proiezioni.)
Scelgo un punto qualsiasi $x \in \prod_{i\in I} X_i$ e sia K intorno compatto. Siccome K è un intorno, contiene un aperto del tipo $\prod_{i\in I} A_i$ con tutti gli A_i uguali ad X_i tranne che per un numero finito F di indici. Per $i \in I \setminus F$ ho quindi $\pi_i(K) \supset \pi_i(\prod_{i\in I} A_i) = X_i$, quindi X_i compatto perchè immagine di un compatto secondo una funzione continua.

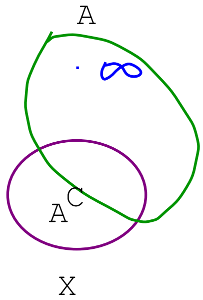
è vero che un prodotto è localm. compatto se e solo se i fattori sono tutti compatti tranne un numero finito e questi fattori sono localmente compatti ?

(11) Un prodotto infinito di spazi localmente compatti non è necesariamente localmente compatto.
Per l'esercizio precedente, un prodotto infinito di spazi localmente compatti non compatti, ad esempio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, non è localmente compatto.
Il prodotto di spazi localmente compatti dotato della topologia box è localmente compatto.
Se $(x_i)_{i\in I}$ in $\prod_{i\in I} X_i$ e per ogni i K_i è un intorno compatto di x_i in X_i, allora $\prod_{i\in I} K_i$ è compatto per il Teorema di Tychonoff. Nella topologia prodotto box $\prod_{i\in I} K_i$ è un intorno di $(x_i)_{i\in I}$ (non lo sarebbe nella topologia prodotto usuale)

(12) Se X è T_2 ma non T_3, allora non esiste una compattificazione K di X tale che K sia T_2. (Suggerimento: se per assurdo esistesse una compattificazione T_2, considerare gli assiomi di separazione che valgono in K e in X.)
Se K è una compattificazione T_2, allora K è T_3. Ma un sottospazio di uno spazio T_3 è ancora T_3, quindi X sarebbe T_3 assurdo.

(13) (*) Sia X uno spazio topologico non compatto, $\infty \notin X$ e sia Y l'insieme $X \cup \{\infty\}$. È vero che la topologia di Alexandroff è la topologia più forte su Y tale che Y è una compattificazione di X?
Sia τ la topologia su X e sia τ' una topologia su Y che lo rende una

compattificazione di X. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto di τ' è un aperto di τ^*, dove τ^* è la compattificazione di Alexandroff. Se $A \in \tau'$ e $A \subset X$, allora $A \in \tau$, perchè per definizione di compattificazione, X deve essere un sottospazio di Y. Se invece $\infty \in A$, allora $A \cap X$ è un aperto di τ, sempre perchè X è un sottospazio di Y. Quindi A^{C} è chiuso in X. Per dimostrare che $A \in \tau^*$ dobbiamo dimostrare che A^{C} è anche compatto in X.



Sia quindi $(B_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di A^{C} mediante aperti di τ. Non è scontato che i B_i siano aperti di τ', ma siccome X è sottospazio di (Y, τ'), allora per ogni i, $B'_i = B_i$ è un aperto di τ' oppure $B'_i = B_i \cup \{\infty\}$ è un aperto di τ'. In ogni caso, se aggiungo A a $(B'_i)_{i\in I}$ ottengo un ricoprimento di Y mediante elementi di τ'. Per la compattezza di (Y, τ') posso estrarre un sottoricoprimento finito dato da A e $(B'_i)_{i\in F}$. Ma allora $(B_i)_{i\in F}$ è un ricoprimento aperto di A^{C} mediante aperti di τ. Cioè A^{C} è compatto in (X, τ).

Sapreste definire una topologia su Y diversa dalla topologia di Alexandroff ma che comunque rende Y una compattificazione di X?

Basta aggiungere a τ l'insieme $X \cup \{\infty\}$ come unico aperto a cui appartiene ∞. In generale, questa topologia è diversa da quella di Alexandroff. Sapreste dare un esempio in cui invece coincide con la topologia di Alexandroff?

(14) Esiste una compattificazione di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ che sia ottenuta aggiungendo solo un punto e che sia contemporaneamente T_2?

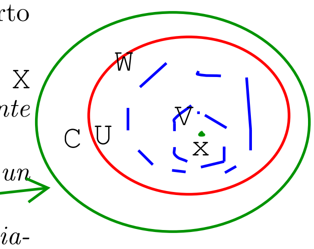
Per la Proposizione 14.2.5, la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ non è T_2, poiché $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ non è localmente compatto. Per l'esercizio precedente, ogni compattificazione mediante un solo punto è più debole di quella di Alexandroff. Quindi non può essere T_2.

(15) (a) Uno spazio topologico X è T_3 se e solo se è T_1 e inoltre:
per ogni $x \in X$ e per ogni aperto U tale che $x \in U$, esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $\overline{V} \subset U$.

Supponiamo sempre di lavorare con spazi T_1.

Dimostriamo prima che uno spazio è T_3 se e solo se vale la seguente proprietà:

(a') per ogni punto x e ogni aperto U tale che $x \in U$, esistono un aperto V e un chiuso D tali che $x \in V \subset D \subset U$.



Osserviamo infatti che, dati sottoinsiemi qualunque V, W e C, abbiamo che V, W sono disgiunti se e solo se $V \subset W^{\mathsf{C}}$. Inoltre $C \subset W$ se e solo se $W^{\mathsf{C}} \subset C^{\mathsf{C}}$.

Quindi se lo spazio è T_3 e valgono le ipotesi in (a'), prendiamo $C = U^{\mathsf{C}}$, che è un chiuso. La proprietà T_3 ci fornisce aperti disgiunti V e W. Allora prendendo $D = W^{\mathsf{C}}$ abbiamo che (a') è verificata, siccome $x \in V \subset W^{\mathsf{C}} \subset C^{\mathsf{C}} = U^{\mathsf{CC}} = U$.

Viceversa, se vale (a') e x e C soddisfano le ipotesi della condizione T_3, basta applicare (a') a $U = C^{\mathsf{C}}$ e verificare che V e $W = D^{\mathsf{C}}$ sono aperti che verificano la conclusione della proprietà T_3.

Abbiamo verificato che T_3 è equivalente ad (a')

Ma adesso è facile verificare che (a) e (a') sono equivalenti. Infatti, se vale (a'), siccome D è chiuso, $\overline{V} \subset D \subset U$. Viceversa, se vale (a), *basta prendere $D = \overline{V}$ ottenendo (a') .*

(b) Se X è T_2 e compatto, allora ogni punto di X ha un sistema fondamentale di intorni compatti.

Se X è T_2 e compatto, allora X è T_3, quindi vale la proprietà in (a). Sia $x \in X$, considero l'insieme di tutti gli intorni compatti di x e voglio dimostrare che si tratta di un sistema fondamentale di intorni. Infatti, sia U un intorno di x, non si perde in generalità supponendo U aperto. La proprità (a) mi fornisce V aperto tale che $\overline{V} \subset U$. Ma $\overline{V}$ è un chiuso in un compatto, quindi compatto, ed è un intorno di x. contenuto in U

(c) * Se X è T_2 e localmente compatto, allora ogni punto di X ha un sistema fondamentale di intorni compatti. (Suggerimento: sia K un intorno compatto di x, applicare il punto precedente a $K\ldots$)

Quindi sia U_1 intorno di x in X, supponiamo U_1 aperto. Allora $U = U_1 \cap K$ è un intorno aperto di x in K. Per il puno precedente, x ha un intorno compatto $D \subset U$ in K. Resta da dimostrare che D è un intorno di x anche in X. Siccome K è un intorno di x, allora esiste Z aperto di X tale che $x \in Z \subset K$. Siccome D è un intorno di x in K, per definizione di topologia di sottospazio, esiste un aperto A di X tale che $A \cap K \subset D$. Allora $x \in A \cap Z$, aperto di X, e $A \cap Z \subset A \cap K \subset D$.

(d) Usare il punto precedente per dimostrare che ogni spazio T_2 localmente compatto è T_3.

Basta dimostrare che vale (a'). Se $x \in U$ e U aperto, per (c) esistono un aperto V e un compatto D tali che $x \in V \subset D \subset U$. Ma un compatto in uno spazio T_2 è chiuso, quindi D è chiuso e vale (a').

L'ipotesi T_2 è necessaria?

Sì, è necessaria. Come controesempio basta prendere uno spazio T_1 compatto (che è ovviamento localmente compatto, secondo la nostra definizione) ma che non sia T_2, ad esempio, uno spazio infinito con la topologia cofinita.

Addirittura, tutti gli intorni di qualsiasi punto sono compatti!