

Esercizi su compattezza (13 Novembre 2020)

- (1) Siano X e Y spazi topologici ed $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Sul prodotto insiemistico $A \times B$ si possono definire due topologie.

- Si considerino A e B con le topologie di sottospazio e si dia ad $A \times B$ la topologia prodotto.

- Altrimenti, $A \times B$ si può considerare come un sottoinsieme di $X \times Y$ e ad $A \times B$ si può dare la topologia di sottospazio.

Le due topologie definite sopra coincidono (ad esempio, utilizzare le basi standard).

Un aperto di A ha la forma $U \cap A$ con U aperto di X e un aperto di B ha la forma $V \cap B$ con V aperto di Y . Quindi una base del prodotto $A \times B$ è data dai "rettangoli" del tipo $(U \cap A) \times (V \cap B)$.

Una base di $X \times Y$ è data dai prodotti $U \times V$ con U e V come sopra, quindi la famiglia degli insiemi del tipo $(U \times V) \cap (A \times B)$ è una base per $A \times B$ considerato come sottospazio di $X \times Y$. Ma $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$

Si può verificare che queste due topologie coincidono usando le proprietà caratteristiche delle costruzioni coinvolte?

- (2) ** Siano X e Y spazi topologici e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X . Sia $\simeq$ la relazione su $X \times Y$ definita da $(x, y) \simeq (x', y')$ se $x \sim y$ e $y = y'$.

È vero che $(X/\sim) \times Y$ è omeomorfo a $(X \times Y)/\simeq$? NO, Munkres, Topology, Sez. 22

Sapreste enunciare un risultato analogo nel caso in cui anche su Y sia definita una relazione di equivalenza $\approx$?

- (3) Sia X uno spazio topologico dotato della topologia cofinita, $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva, si supponga che Y abbia almeno due elementi e si doti Y della topologia quoziente. Sapreste trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché anche Y abbia la topologia cofinita?

Supponiamo che Y abbia la topologia cofinita. La controimmagine di un chiuso (in particolare, di un punto) deve essere un chiuso, quindi un sottoinsieme finito di X (la controimmagine di un punto non può essere tutto X perchè f suriettiva ed Y ha almeno due punti). Quindi se Y ha la topologia cofinita, la controimmagine di ogni punto è finita.

Viceversa, se la controimmagine di ogni punto è finita e $B \subseteq Y$, allora $f^{-1}(B)$ è aperto in X se e solo se B è cofinito (oppure $\emptyset$). Infatti, se B è cofinito, allora $Y \setminus B$ è finito, la controimmagine di $Y \setminus B$ è finita (perchè unione finita di insiemi finiti) quindi $f^{-1}(B)$ è cofinito. Se B non è cofinito, allora nemmeno $f^{-1}(B)$ è cofinito, poichè f suriettiva.

- (4) Sia X uno spazio topologico e $K \subset X$ un suo sottoinsieme. K si dice compatto in X se per ogni famiglia di aperti $(A_i)_{i \in I}$ di X tale che $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, esiste $F \subseteq I$ finito tale che $K \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$.

Verificare che K è compatto in X se e solo se K è compatto come spazio topologico, con la topologia di sottospazio. (Quindi la terminologia non crea ambiguità.)

Un aperto di K (inteso come spazio topologico a se stante) ha la forma $A \cap K$ con A aperto di X ...

- (5) Sia X uno spazio topologico e siano $H, K \subset X$.

È vero che $H \cup K$ è compatto se e solo se sia H che K sono compatti?

Se sia H che K sono compatti, allora $H \cup K$ è compatto. Infatti un ricoprimento di $H \cup K$ è anche un ricoprimento di H , quindi possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. Lo stesso discorso per K , e unendo le due famiglie finite otteniamo un sottoricoprimento di $H \cup K$.

Il viceversa è ovviamente falso, ad esempio $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$ oppure $[0, 2] = [0, 1] \cup (0, 2]$

È vero che $H \cap K$ è compatto se e solo se sia H che K sono compatti?

Vale almeno l'implicazione in una delle due direzioni? E assumendo qualche assioma di separabilità?

Ovviamente $H \cap K$ compatto non implica H e K compatti, esempio $(0, 2] \cap [1, 3) = [1, 2]$.

[[(svolto nelle dispense, anzi, in forma più generale) In uno spazio T_2 abbiamo che compatto implica chiuso, quindi se H e K compatti, allora $H \cap K$ chiuso, chiuso anche in H compatto, quindi $H \cap K$ compatto.

L'ipotesi T_2 è necessaria. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ con due origini (l'esempio 9.1.8, ma facendo variare x in $[0, 1]$ anziché su tutto $\mathbb{R}$)

- (6) Esistono spazi topologici in cui ogni successione è convergente? Sì, topologia indiscreta. Possono essere T_2 con almeno 2 punti? T_1 ? No. Se X T_1 con due punti a e b , sia $x_n = a$ se n pari, $x_n = b$ se n dispari, ogni punto ha un intorno che "evita" a oppure b ... T_0 ? Sì! $X = \{a, b\}$ con $\{a\}$ unico aperto non banale. Ogni successione converge a b , ma X è T_0 .
- (7) Se X è un insieme totalmente ordinato senza massimo, allora X con la topologia d'ordine non è compatto.

$(-\infty, x)$, al variare di $x \in X$ è un ricoprimento, poiché X non ha massimo. Non ammette sottoricoprimento finito: il max fra gli x finiti non appartiene.

Esiste un un insieme totalmente ordinato X con massimo e minimo ma tale che X con la topologia d'ordine non è compatto?

$[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ cioè $[0, 1]$ intersecato $\mathbb{Q}$

- (8) * Supponiamo che X sia un insieme totalmente ordinato con le seguenti proprietà:

- per ogni ogni sottoinsieme Y finito o numerabile di X esiste $x \in X$ tale che $y < x$, per ogni $y \in Y$ (in particolare, X non ha massimo)
- ogni sottoinsieme S non vuoto di X ha minimo.

(Un insieme con tali proprietà esiste, ma la dimostrazione va oltre gli scopi del corso.) Dimostrare che X è compatto per successioni (= sequenzialmente compatto) ma non compatto (per l'esercizio precedente). (Suggerimento: se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione, possiamo supporre che uno stesso valore della successione non si ripeta infinite volte. Allora considerare il sottoinsieme S di X costituito dagli elementi $s \in X$ tali che $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < s\}$ è infinito.)

S è non vuoto per la prima proprietà quindi ha minimo s , quindi c'è un x_{n_1} minore, ma ce n'è anche infiniti fra x_{n_1} e s , se no il minimo sarebbe $\leq x_{n_1}$, quindi c'è x_{n_2} con $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < s$. Un aperto che contiene s contiene un intervallo (s_1, s_2) con $s_1 < s < s_2$, ma $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < s_1\}$ è finito per la minimalità di s , quindi tutti gli elementi della successione da un punto in poi stanno in (s_1, s_2) quindi la sottosuccessione converge ad s .

- (9) Come verificato in un esercizio precedente, se la proprietà (3) di una distanza si indebolisce a

$$d(x, x) = 0, \text{ per ogni } x \in X,$$

le costruzioni e i risultati in 2.3.3 - 3.0.4 forniscono comunque una topologia. Si tratta di una topologia di Hausdorff? Almeno T_0 ?

No. Se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$, allora x ed y appartengono esattamente alle stesse palle. Infatti per la disuguaglianza triangolare, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(y, z)$ e viceversa, per ogni z .

- (10) Una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa alle prime due proprietà della distanza e alla proprietà indicata nell'esercizio precedente si chiama *pseudodistanza* (talvolta pseudometrica).

Sia d una pseudodistanza su X e τ la topologia indotta secondo l'esercizio precedente. Si definisca su X la relazione d'equivalenza $x \sim y$ se $d(x, y) = 0$.

Verificare che d induce su $X/\sim$ una distanza. Questa distanza induce su $X/\sim$ la topologia quoziente determinata da τ su $X/\sim$.

$d_1([x], [y]) = d(x, y)$ definisce una distanza su $X/\sim$. Per l'osservazione nell'esercizio precedente la definizione non dipende dai rappresentanti. Simmetria e disuguaglianza triangolare sono banali.

La controimmagine di una palla è un palla (stesso raggio) quindi la proiezione è continua da X a $X/\sim$ con la topologia indotta da d_1 . L'immagine di una palla è una palla, quindi l'immagine di un aperto è aperto. L'omeomorfismo con $X/\sim$ dotato della topologia quoziente segue da 7.0.2. (NB: in questo caso speciale tutti gli aperti di X sono saturi.)

- (11) Uno spazio topologico si dice *numerabilmente compatto* se ogni ricoprimento aperto infinito numerabile ha un sottoricoprimento finito.

Uno spazio topologico si dice Lindelöf se ogni ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito o numerabile.

Verificare che uno spazio topologico è compatto se e solo se è contemporaneamente numerabilmente compatto e Lindelöf¹.

Dato un ricoprimento, per la proprietà di Lindelöf si ottiene un sottoricoprimento numerabile, per la compattezza numerabile si ottiene un sottoricoprimento finito.

- (12) Uno spazio secondo numerabile (cioè con una base numerabile) è Lindelöf. *svolto a lezione.*

$\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è Lindelöf?

- (13) Sia X uno spazio topologico e C un suo sottoinsieme chiuso.

Se X è numerabilmente compatto, allora anche C è numerabilmente compatto.

Se X è Lindelöf, allora anche C è Lindelöf.

Se C è chiuso e $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di C , allora aggiungendo C^c ad $\mathcal{U}$ si ottiene un ricoprimento di X ...

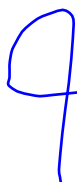
È necessaria l'ipotesi che C sia chiuso?

$$\text{Sì, } X = [0, 1], C = (0, 1). \quad (0, 1 - 1/(n+1))$$

Per Lindelöf: sia X insieme non numerabile con un elemento speciale $\omega \in X$. Sia τ la topologia che ha per aperti tutti i sottoinsiemi di $X \setminus \{\omega\}$

¹In alcuni testi antichi di topologia, l'espressione "compatto" indicava gli spazi numerabilmente compatti, e gli spazi che oggi chiamiamo compatti venivano chiamati "bicompati".

e tutti i sottoinsiemi di X cofiniti che contengono ω . $X \setminus \{\omega\}$ ha la topologia discreta quindi non è Lindelöf, ma X è addirittura compatto. (Questa costruzione è un caso particolare di compattificazione, che probabilmente vedrete a lezione.)



- (14) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici a due a due disgiunti. Se $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, la topologia dell'unione disgiunta su X è definita da:

$A \subseteq X$ è aperto in X se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i , per ogni $i \in I$.

- (a) È vero che X è T_0 se e solo se ogni X_i è T_0 ?

- (b) Per gli altri assiomi di separazione?

Sì, per tutti gli assiomi di separazione definiti a lezione. Ad esempio, se X è T_2 , e $x \neq y \in X_i$, allora esistono in X due aperti A e B che separano x e y , ma allora $A \cap X_i$ e $B \cap X_i$ separano x e y in X_i .

Viceversa, se ogni X_i è T_2 , allora X è T_2 . Se $x \in X_i$ e $y \in X_j$, con $i \neq j$, allora X_i e X_j stessi separano x e y . Se $x \neq y \in X_i$ allora siccome X_i è T_2 , esistono due aperti di X_i che separano, ma questi aperti sono anche aperti di X .

Per il caso T_3 ci vuole un argomento aggiuntivo. Osservare che per ogni $J \subset I$ $\bigcup_{i \in J} X_i$ è un chiuso, perchè il complementare è aperto. Quindi se $x \notin C \subset X$, $x \in X_i$, assumendo che X_i sia T_3 , abbiamo che $C \cap X_i$ è un chiuso di X_i . Poiché X_i è T_3 , allora esistono aperti A e B di X_i tali che $x \in A \dots$

Ma allora A e $B \cup \bigcup_{j \neq i} X_j$ separano x e C in X .

- (c) È vero che se X è compatto, allora ciascun X_i è compatto? Sì, ogni X_i è un chiuso di X , v. es prec. Vale il viceversa? Vale il viceversa se I è finito?

Il viceversa vale solo se $\{i \in I \mid X_i \neq \emptyset\}$ è finito, poiché $(X_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X .

- (d) Per compattezza numerabile [come sopra] e proprietà di Lindelöf? Solo se $\{i \in I \mid X_i \neq \emptyset\}$ è finito o numerabile.

- (15) Sia di nuovo $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici a due a due disgiunti. Su $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ si può definire un'altra topologia che chiamiamo *somma disgiunta*. Un sottoinsieme A di X è aperto nella topologia somma disgiunta se A è il vuoto, oppure

(i) Per ogni $i \in I$, $A \cap X_i$ è aperto in X_i , e inoltre

(ii) $X_i \subseteq A$ per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito.

Naturalmente, se I è finito, la topologia dell'unione disgiunta e la topologia della somma disgiunta coincidono.

- (a) Verificare che si tratta di una topologia. L'intersezione di due aperti è aperto, perchè comunque l'intersezione ricopre tutti gli X_i tranne un numero finito.

- (b) È vero che X è compatto, se e solo se ciascun X_i è compatto?

Sì: dato un ricoprimento aperto, scelgo A non vuoto qualunque nel ricoprimento; A contiene tutti gli X_i tranne un numero finito; se gli X_i sono tutti compatti, basta un numero finito di aperti per ricoprire gli spazi rimanenti (quelli non ricoperti da A), vedi esercizio 5.

- (c) È vero che se ciascun X_i è T_1 allora anche X è T_1 ?

Sì, ogni punto è un chiuso.

- (d) È vero che se ciascun X_i è T_2 allora anche X è T_2 ?

No, se $\{i \in I \mid X_i \neq \emptyset\}$ è infinito. In tal caso non esistono mai due aperti non vuoti disgiunti!

- (16) Sempre partendo da una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di spazi topologici a due a due disgiunti definiamo una terza topologia, detta *somma di Frolík*.

Sia ω un elemento che non appartiene a nessun X_i . Su $X = \{\omega\} \cup \bigcup_{i \in I} X_i$ si definisca la seguente topologia. Un sottoinsieme A di X è aperto se

- (i) $\omega \notin A$ e, per ogni $i \in I$, $A \cap X_i$ è aperto in X_i , oppure
- (ii) $\omega \in A$, $A = X_i$ per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito, e $A \cap X_i$ è aperto in X_i , per i rimanenti i .

Discutere compattezza, proprietà di Lindelöf e assiomi di separazione in una somma di Frolík.

Le proprietà di compattezza si conservano. Infatti per ogni ricoprimento di X ci deve essere un A tale che $\omega \in A$. Quindi, come nell'esercizio precedente, basta ricoprire un numero finito di spazi, quelli non ricoperti da A .

Anche gli assiomi di separazione sono conservati. Ad esempio, per T_2 , se ciascun X_i è T_2 , allora X è T_2 . L'unico caso diverso dall'esercizio 14 è quando $x \in X_i$ e $y = \omega$. Ma in tal caso X_i e $X \setminus X_i$ sono aperti che separano.

Per il caso di T_3 e T_4 osservare che se un chiuso C di X non contiene ω , allora $C \cap X_i = \emptyset$ per tutti gli i tranne un numero finito...

- (17) * Se $a < b \in \mathbb{R}$, si definisca $(a, b)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b\}$. Dimostrare che se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $c < d$, allora $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c, d)_{\mathbb{Q}}$ sono omeomorfi. (L'esercizio era già stato proposto; qui si suggerisce un metodo alternativo per la soluzione).

(a) Nel caso in cui $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ l'esercizio si può risolvere come nelle dispense, Esercizio 4.4.4.

(b) In generale, siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni a valori razionali, e che convergono ad a, b, c, d , rispettivamente. Si suppone che gli elementi delle successioni siano contenuti nei corrispondenti intervalli, che a_n e c_n siano strettamente decrescenti b_n e d_n siano strettamente crescenti e inoltre $a_0 = b_0$, $c_0 = d_0$.

In base ad (a) e siccome gli elementi delle successioni sono razionali, abbiamo che (a_{n+1}, a_n) è omeomorfo a (c_{n+1}, c_n) etc.

“Unire” questi omeomorfismi per ottenere un omeomorfismo fra $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c, d)_{\mathbb{Q}}$.

(18) *

- (a) Si sa che il prodotto di due spazi topologici numerabilmente compatti non è necessariamente numerabilmente compatto. Costruire un controesempio è estremamente difficile (vedi Engelking, Esempio 3.10.19). In questo esercizio si chiede di trovare l'errore nella seguente "Dimostrazione". (In altre parole, perchè la dimostrazione che il prodotto di due spazi compatti è compatto non si applica alla compattezza numerabile?)

"Dimostrazione" (sbagliata) che il prodotto di due spazi topologici numerabilmente compatti è numerabilmente compatto. Siano X e Y numerabilmente compatti e sia $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento numerabile di $X \times Y$. Se $\mathcal{U}$ è finito, non c'è niente da dimostrare. Supponiamo quindi che $\mathcal{U}$ sia infinito. Siccome ogni aperto di $X \times Y$ è unione di aperti del tipo $A \times B$, con A aperto di X e B aperto di Y , posso scrivere ogni aperto di U_n in $\mathcal{U}$ come unione di aperti del tipo $A \times B$, diciamo, $U_n = \bigcup_{i \in I_n} (A_i \times B_i)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per certi insiemi I_n dipendenti da n .

L'insieme di tutti gli $A_i \times B_i$ utilizzati in questo modo è un ricoprimento aperto di $X \times Y$. In dettaglio, se $\mathcal{U}'$ è la famiglia $\{A_i \times B_i \mid i \in I_n, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$, allora $\mathcal{U}'$ è un ricoprimento aperto di $X \times Y$. In altre parole, se $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, allora $\mathcal{U}'$ è la famiglia $\{A_i \times B_i \mid i \in I\}$. Trovo adesso un sottoricoprimento finito della famiglia $\mathcal{U}'$. Per ogni $x \in X$, il sottoinsieme $\{x\} \times Y$ di $X \times Y$ è ricoperto da $\mathcal{U}'$. Quindi $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)$. Questo implica che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$. Siccome Y è numerabilmente compatto, allora esiste un insieme finito F_x tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in F_x} B_i$, da cui $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in F_x} (A_x \times B_i)$, dove $A_x = \bigcap_{i \in F_x} A_i$ è aperto poichè intersezione finita di aperti (cf. il "Tube lemma" nelle dispense).

Facendo variare x in X ottengo un ricoprimento $(A_x)_{x \in X}$ di X , che per ipotesi ha un sottoricoprimento finito, diciamo, $A_{x_0}, \dots, A_{x_h}$. Per costruzione, l'insieme finito degli aperti $A_{x_0} \times B_i$ ($i \in F_{x_0}$), $\dots$, $A_{x_h} \times B_i$ ($i \in F_{x_h}$) è un ricoprimento di $X \times Y$. Ciascun $A_{x_\ell} \times B_i$ di questo tipo è contenuto nell'elemento $A_i \times B_i$ di $\mathcal{U}'$. Ciascun $A_i \times B_i$ di $\mathcal{U}'$, a sua volta, è contenuto in un elemento U_n di $\mathcal{U}$.

Siccome ho un ricoprimento finito $A_{x_\ell} \times B_i$ e ciascuno di questi aperti è contenuto in un $U_n \in \mathcal{U}$, allora l'insieme finito degli U_n ottenuti in questo modo è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Dov'è l'errore?

- (b) Il prodotto di uno spazio compatto con uno spazio numerabilmente compatto è numerabilmente compatto?
- (c) Il prodotto di uno spazio compatto con uno spazio Lindelöf è Lindelöf?

Sia Y compatto e X di Lindelöf, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto. Per ogni $x \in X$, per il Tube lemma e la prima parte della dimostrazione di 11.1.5 esiste un numero finito di aperti del ricoprimento che contiene il cilindro $U_x \times Y$, per qualche aperto U_x di X che contiene x : Siccome gli U_x sono un ricoprimento di X , per la proprietà di Lindelöf...

- (d) La retta di Sorgenfrey ($\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey) è Lindelöf, ma il suo quadrato non lo è.

Dimostriamo prima che $[0, 1]$ con la topologia di Sorgenfrey è Lindelöf (chiaramente non è compatto, perchè?). Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$ e supponiamo che non esista un sottoricoprimento numerabile. Allora chiaramente c'è $r \in \mathbb{R}$ tale che $[0, r]$ non è ricoperto da una famiglia numerabile di aperti del ricoprimento (per ipotesi 1 è un tale elemento). Sia s l'estremo inferiore di $\{r \mid [0, r] \text{ non è ricoperto da una famiglia numerabile di elementi di } \mathcal{U}\}$. Quindi, per ogni $t < s$ esiste un sottoricoprimento numerabile di elementi di $\mathcal{U}$ e che ricopre $[0, t]$. Se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione che converge ad s e $s_n < s$ per ogni n , allora ogni $[0, s_n]$ è ricoperto da una famiglia numerabile di elementi di $\mathcal{U}$, quindi $[0, s)$ è ricoperto da una sottofamiglia numerabile di $\mathcal{U}$ (l'unione numerabile delle famiglie precedenti, che sono numerabili).

Ma s deve appartenere ad un elemento di $\mathcal{U}$, quindi $[a, b)$ è contenuto in un elemento A di $\mathcal{U}$, con $a \leq s < b$. Aggiungendo A al ricoprimento precedente, ricopriamo tutto $[0, b']$, scegliendo b' tale che $s < b' < b$. Questo contraddice l'ipotesi che s sia l'estremo inferiore.

Avendo dimostrato che $[0, 1]$ con la topologia di Sorgenfrey è Lindelöf, allora $[z, z + 1]$ è Lindelöf, per ogni $z \in \mathbb{Z}$. Ma allora $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey è Lindelöf, perchè unione numerabile di spazi Lindelöf.

$\mathbb{R}^2$, con $\mathbb{R}$ dotato della topologia di Sorgenfrey non è Lindelöf. Infatti $C = \{(x, y) \mid x = -y\}$ è chiuso (verificare) ed è un sottospazio discreto di cardinalità non numerabile. Ad esempio, la famiglia che contiene $\mathbb{R}^2 \setminus C$ e tutti gli $[x, \infty] \times [-x, \infty]$ al variare di $x \in \mathbb{R}$ è un ricoprimento che non ammette nessun sottoricoprimento numerabile.