Esercizi di Topologia (quozienti, assiomi di separazione, 31 Ottobre 2020)

(1) Sia X uno spazio topologico, $f : X \to Y$ una funzione suriettiva e si doti Y della topologia quoziente. =indotta

 (a) Se X ha la topologia discreta, è vero che Y ha la topologia discreta?
 Si': la controimmagine di ogni sottoinsieme di Y è aperto in X, quindi ogni sottoinsieme di Y è aperto nella topologia quoziente.
 E per la topologia indiscreta?
 Si': poichè f è suriettiva, gli unici sottoinsiemi di Y con controimmagine aperta sono il vuoto e tutto Y. Se f non fosse suriettiva, la topologia indotta non sarebbe la topologia indiscreta, perchè se y non appartiene all'immagine, $\{y\}$ è aperto nella topologia indotta.
 Per la topologia cofinita?
 Y non sempre ha la topologia cofinita. Supponiamo X infinito con topologia cofinita, X unione disgiunta di X_1 e X_2 entrambi infiniti,
 esattamente
 Y abbia due elementi y_1 ed y_2, ed f mandi gli elementi di X_1 e in y_1 e gli elementi di X_2 in y_2... Quindi in questo caso Y ha la topologia indiscreta.
 Sapreste trovare una condizione necessaria e sufficiente affinche' Y abbia la topologia cofinita?

 (b) (i) Se Y ha la topologia discreta, è vero che X ha la topologia discreta? (ii) E con la topologia indiscreta? (iii) Con la topologia cofinita?
 Nessuna. Un controesempio a (ii) è dato dall'ultimo caso nel punto precedente. Per dare un controesempio a (i), (iii) consideriamo gli stessi insiemi e funzione del caso precedente, ma consideriamo su X la topologia con unici aperti non banali X_1 e X_2. La topologia su X non è la cofinita e nemmeno la discreta, ma la topologia indotta su Y è la discreta e la cofinita (siccome Y è finito.)
 Formalmente sarebbe bastato prendere Y con un punto solo: in questo caso c'è un'unica topologia, quindi sia discreta che indiscreta che cofinita, ma la topologia su X può essere arbitraria.

 (c) Se X è uno spazio metrico, è vero che Y è metrizzabile?
 No, come visto a lezione un quoziente di uno spazio metrico può essere non T_2.

 (d) Sia $X = [0, 1]$ e Y il quoziente ottenuto collassando $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Che topologia ha Y?
 Gli elementi di Y sono le classi $\{r\}$ con r irrazionale, e $q = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Sia $B \subseteq Y$. Se $q \in B$, allora $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subseteq f^{-1}(B)$, ma l'unico aperto di X che contiene $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è tutto $[0, 1]$, quindi se B è aperto, deve essere $B = Y$.
 Se $q \notin B$, allora $f^{-1}(B)$ è un insieme di irrazionali, ma l'unico sottoinsieme aperto di X costituito solo da irrazionali è il vuoto. Quindi Y ha la topologia indiscreta.

 (e) Esiste uno spazio topologico T_4 tale che un suo quoziente non è T_0?
 Stesso controesempio del punto precedente.

(2) Supponiamo che (X, τ) e (Y, σ) siano spazi topologici, con X e Y insiemi disgiunti. Su $X \cup Y$ si può definire una topologia ρ al seguente modo: se

$A \subseteq X \cup Y$, allora A è un aperto di ρ se e solo se $A \cap X$ è un aperto di τ e $A \cap Y$ è un aperto di σ. In altre parole, un aperto di ρ è l'unione di un aperto di τ con un aperto di σ (ricordiamo che X e Y sono disgiunti). La topologia ρ è detta *topologia dell'unione disgiunta.*

In caso di ambiguità (confronti con altre topologie) indichiamo la topologia unione disgiunta con $X \dot\cup Y$

(a) Verificare che ρ è una topologia su $X \cup Y$.

(b) È vero che se τ e σ sono la topologia discreta (indiscreta, cofinita) allora anche ρ è la topologia discreta (indiscreta, cofinita)?
Si' discreta: ogni sottoinsieme è aperto perchè unione di due aperti. Si' cofinita, l'unione di un cofinito in X e di un cofinito in Y è un cofinito in $X \cup Y$ e viceversa. No indiscreta, basta che X e Y siano entrambi non vuoti, allora X (pensato come $X \cup \emptyset$ è un aperto non banale di $X \cup Y$)

(c) È vero che se (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff, allora $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff?
Si'. Se X e Y sono di Hausdorff e $a \neq b \in X \cup Y$ si considerino i vari casi: $a, b \in X$, allora gli intorni che separano a e b in X separano a e b in $X \cup Y$. Lo stesso se $a \neq b \in Y$. Se $a \in X$ e ~~$y \in B$~~ b∈Y *sono X ed Y stessi aperti che separano a e b.*
È vero che se $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff, allora (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff?
Si', ad esempio, se $a \neq b \in X$ e A B aperti di $X \cup Y$ separano a e b in $X \cup Y$, allora $A \cap X$ e $B \cap X$ separano a e b in X.
E per gli altri assiomi di separazione? T0 - T4
ragionamenti simili. Osservare che C chiuso di $X \cup Y$ se e solo se $C \cap X$ chiuso in X e $C \cap Y$ chiuso in Y.

(d) Siano X e Y sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{R}$, con la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea. È vero che la topologia dell'unione disgiunta è la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $X \cup Y$?
No, non sempre. Esempio $X = [0, 1)$ $Y = [1, 2]$. Allora Y è aperto nella topologia unione disgiunta su $X \dot\cup Y$, ma Y non è aperto nel sottospazio $X \cup Y = [0, 2]$ di $\mathbb{R}$.

(e) Verificare che X è un sottospazio di $X \dot\cup Y$, lo stesso per Y.
Per costruzione, gli aperti di X sono (tutti e soli) del tipo $X \cap A$ con A aperto nella topologia unione disgiunta $X \dot\cup Y$.

in generale
Z top indiscr
W⊆Z
topol
di
sottosp su W
è indiscreta

(f) ρ è l'unica topologia su $X \cup Y$ tale che X è un sottospazio di $X \dot\cup Y$ ed Y è un sottospazio di $X \dot\cup Y$?
unione disg
No. Ad esempio, capita che X è un sottospazio di $X \cup Y$ ed Y è un sottospazio di $X \cup Y$ quando X, Y e $X \cup Y$ hanno tutti la topologia indiscreta. Invece con la topologia unione disgiunta X è aperto in $X \dot\cup Y$, quindi non si tratta della topologia indiscreta, purché Y sia non vuoto.

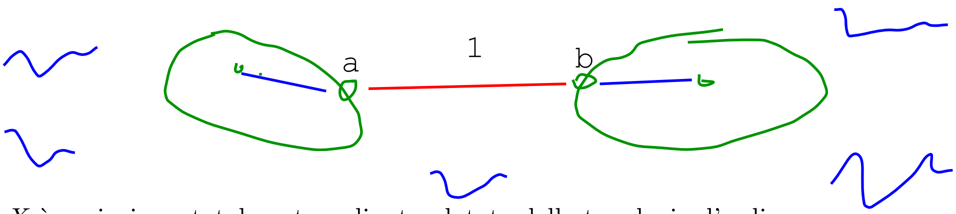
(g) Siano $i : X \to X \dot\cup Y$ e $j : X \to X \cup Y$ le (estensioni delle) funzioni identità. Verificare che i e j sono continue, aperte e chiuse. Inoltre ρ è la topologia più forte che rende i e j continue.
Se i e j continue e A aperto, allora $i^{-1}(A) = A \cap X$ e $j^{-1}(A) = A \cap Y$ devono essere aperti. Quindi non ce n'è una strettamente più forte.

(h) La topologia dell'unione disgiunta è una topologia coindotta? (vedere l'esercizio 6.3.5 delle dispense...)
Se X_i sono spazi topologici, Z è un insieme, e $f_i : X_i \to Z$ sono funzioni, esiste la topologia più forte su Z che rende tutte le f_i continue. $B \subseteq Z$ è aperto se e solo se $f_i^{-1}(B)$ è aperto in X_i per ogni i. In questo modo ottengo una topologia per le proprietà della controimmagine. Se voglio che tutte le f_i siano continue, allora non posso aggiungere altri aperti.
Quindi la topologia unione disgiunta è un caso particolare di topologia coindotta, per il punto precedente. In questo caso Z è l'insieme $X \cup Y$ e le funzioni sono i e j.

(i) Siano X ed Y spazi metrici disgiunti, e siano τ e σ le topologie indotte dalle rispettive metriche. Esiste una metrica su $X \cup Y$ che induce la topologia ρ?

Esercizio 9, foglio 10 ottobre

Si', metrica come esercizio in altro foglio. Per verificare che la topologia indotta è la stessa, si osservi che una base per la topologia indotta da una distanza è data anche dalle palle di raggio < 1.



(3) Se X è un insieme totalmente ordinato, dotato della topologia d'ordine, allora X è T_2. È T_3? (**) È T_4?

Siano $a \neq b \in X$, supponiamo $a < b$. Se esiste c tale che $a < c < b$, allora $(-\infty, c)$ e (c, ∞) sono aperti disgiunti che separano a e b.

Se non esiste c tale che $a < c < b$, allora $(-\infty, b)$ e (a, ∞) sono disgiunti, e sono aperti che separano. Quindi è T_2.

Sia C chiuso e $a \notin C$. Siccome C è chiuso, il complementare è aperto, quindi c'è un aperto disgiunto da C che contiene a, possiamo supporre $a \in (b, d)$ con $(b, d) \cap C = \emptyset$ (gli altri casi, intervalli con estremo infinito si trattano in maniera simile).

Se ci sono b' e d' con $b < b' < a < d' < d$, allora aperti che separano sono (b', d') e $(-\infty, b') \cup (d', \infty)$.

Se non posso trovare d', allora $(b', d) \cap (a, \infty) = \emptyset$ e prendo (b', d) e $(-\infty, b') \cup (a, \infty)$. Simmetricamente se non posso trovare b'. Entrambe le modifiche se non esistono né b' né d'. In quest'ultimo caso prendo (b, d) e $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$ (infatti in questo caso a è un punto isolato)

È vero che lo spazio è anche T_4, ma non sono riuscito a trovare una dimostrazione semplice.

(4) (a) In uno spazio T_2 ogni successione convergente converge ad un unico punto.
Svolto a lezione.

(b) Se X è uno spazio topologico e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_1.
Per assurdo. Se X non T_1 c'è un punto x che non è chiuso. Sia y nella chiusura di $\{x\}$, $y \neq x$. La successione costante con valore

y converge ovviamente ad y, ma converge anche ad x, perchè ogni intorno di x contiene tutti gli elementi della successione.

(c) Se X è uno spazio topologico primo numerabile e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_2.
Sempre per assurdo. Sia X primo numerabile non T_2 e siano x e y tali che ogni paio di intorni si intersecano. Siano U_n V_n sistemi fondamentali di intorni per x ed y rispettivamente. Possiamo supporre che gli U_n V_n siano successioni decrescenti rispetto ad inclusione. Siccome x e y sono controsempio a T_2, per ogni n c'è $x_n \in U_n \cap V_n$. Siccome gli U_n V_n sono decrescenti x_n converge sia ad x che ad y. (Ogni intorno di x contiene almeno un U_n, quindi anche tutti i successivi).

(d) * Diamo per noto che esiste un insieme totalmente ordinato X tale che, per ogni sottoinsieme finito o numerabile $A \subset X$ esiste $x \in X$ tale che $a < x$, per ogni $a \in A$.
Sia X un tale insieme totalmente ordinato e sia $Y = X \cup \{\omega, \rho\}$, dove ω, ρ sono due "nuovi" elementi distinti non appartenenti ad X. Diamo ad Y la topologia generata dalla seguente base $\mathcal{B}$. Elementi di $\mathcal{B}$ sono tutti i sottoinsiemi aperti di X nella topologia d'ordine. Inoltre sono elementi di $\mathcal{B}$ tutti gli insiemi del tipo $\{\omega\} \cup (x, \infty)$ e $\{\rho\} \cup (x, \infty)$, al variare di $x \in X$.
Con questa topologia Y è T_1 ma non T_2.
ω e ρ non si possono separare. Confronta anche Esempio 9.1.8
In Y ogni successione convergente converge ad un unico punto (usare la proprietà di X enunciata all'inizio),
Siccome stiamo considerando successioni ad indici in $\mathbb{N}$, quindi numerabili, ogni successione è limitata superiormente da qualche $x \in X$. Se la successione è convergente, converge quindi ad un elemento $\leq x$, poiché $(x, \infty) \cup \{\omega\} \cup \{\rho\}$ è aperto. Sempre per l'ipotesi iniziale esiste $y > x$, $y \in X$. Il sottospazio degli elementi $< y$ ha la topologia d'ordine quindi è T_2, quindi se la succesione è convergente converge ad un unico punto.
Commento. Si possono introdurre generalizzazioni dell'idea di successione (net, convergenza di Moore-Smith) in modo che l'unicità del limite sia equivalente a T_2. In questo modo si ottiene anche un'altra caratterizzazione della continuità. Chi fosse interessato consulti https:// en.wikipedia.org/wiki/Net (mathematics)

(5) (a) Se (X, τ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2) e σ è una topologia più forte di τ, allora anche (X, σ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2). *Si', uso gli stessi aperti!*

(b) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subset X$. Dire se esiste la topologia τ' più debole fra le topologie che:
- contengono A, e
- sono più forti di τ.
τ', se esiste deve contenere tutti gli elementi di τ, contenere A ed essere chiusa per intersezioni finite. Quindi τ' deve contenere tutti gli elementi che hanno una delle seguenti due forme:

$$B \cap A, \qquad D \tag{1}$$

con B e D aperti in τ.
La famiglia degli elementi del tipo in (1) *è la base per una topologia, infatti è chiusa per intersezioni di sue elementi, ad esempio,* $(B \cap A) \cap (B' \cap A) = (B \cap B') \cap A$ *e* $(B \cap A) \cap D = (B \cap D) \cap A$.
Ogni topologia che soddisfa alle proprietà deve contenere le unioni di tutti gli elementi di quella base, quindi τ' esiste e quella descritta sopra è una sua base. (A appartiene effettivamente a τ', basta prendere $B = X$.) (In effetti, per ciascuno dei due tipi descritti in (1) *l'unione di elementi dello stesso tipo ha ancora quel tipo, quindi gli aperti di τ' sono tutti e soli quelli della forma $(B \cap A) \cup D$, ma questo risultato non servirà nel seguito.)*

(c) Sia $[0, 1]$ l'intervallo unitario con la topologia euclidea ε, e sia σ la topologia più debole che contiene $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e che è più forte di ε.
Verificare che $[0, 1]$ con la topologia σ non è T_3. Quindi l'analogo della parte (a) non vale per T_3 (e nemmeno T_4) (Sapreste spiegare perchè?). Se "aggiungo aperti" T0-T2 sono ovviamente conservate. Ma se "aggiungo aperti", allora aggiungo anche "nuovi" chiusi, quindi non è detto che T3 e T4 siano conservate
$C = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ è un chiuso perchè complementare di un aperto. L'unico aperto di τ' che contiene C è $[0, 1]$. Se prendo un qualunque numero razionale q, allora $q \notin C$ e non ci sono due aperti che separano q e $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$

(d) Uno spazio con la topologia discreta è T_4.
Sì, dati C e D chiusi disgiunti basta prendere C e D stessi come aperti.

(e) Siano τ_1, τ_2 e τ_3 topologie sullo stesso insieme X, tali che τ_1 è più debole di τ_2 e τ_2 è più debole di τ_3.
È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_2, allora anche (X, τ_2) è T_2?
Si', basta usare τ_1.
È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_4, allora anche (X, τ_2) è T_4?
È almeno T_3, lo spazio (X, τ_2)?
No: $[0, 1]$ τ_1 euclidea, τ_2 come in (c), τ_3 discreta.

(6) Esiste uno spazio topologico che non è T_1 ma tale che, dati due chiusi disgiunti qualunque C e D esistono aperti disgiunti U e V tali che $C \subseteq U$ e $D \subseteq V$?
Si', con almeno due elementi e topologia indiscreta.

(7) Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* =sequenzialmente compatto se ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in X ha una sottosuccessione convergente (una sottosuccessione è $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ con I sottoinsieme infinto di $\mathbb{N}$).

(a) Verificare che il prodotto di due spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni.
Sia (x_n, y_n) successione in $X \times Y$. Siccome X è cps, allora x_n ha una sottosuccessione $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ convergente in X. Siccome Y è cps, $(y_i)_{i \in \mathbb{I}}$ ha una sottosuccessione $(y_i)_{i \in \mathbb{J}}$ convergente in Y; qui $J \subseteq I$.
Ma $(x_i)_{i \in \mathbb{J}}$ è sosttosuccessione della successione $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ convergente, quindi $(x_i)_{i \in \mathbb{J}}$ converge in X. Allora, per un esercizio precedente, $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{J}}$ converge in $X \times Y$

(b) Se X è compatto per successioni, allora anche ogni sottospazio Y chiuso di X è compatto per successioni.
Se x_n converge ad x e gli x_n stanno in Y, allora x sta nella chiusura di Y, cioè in Y.

(c) Mostrare con un controesempio che l'ipotesi che Y sia chiuso è necessaria nel punto precedente.
$x_n = \frac{1}{n+1}$ *converge in* $\mathbb{R}$ *ma non in* $(0, 1)$.

(d) ** Un prodotto numerabile di spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni, ma in generale un prodotto più che numerabile non lo è. (Vedi Engelking Teorema 3.10.35)

Dispense Teorema 12.2.5
[0,1] è sequenzialmente compatto (Th 12.1.7),
ma per il Teorema 12.2.5
$[0,1]^{[0,1]}$ non lo è