Esercizi di Topologia (prodotti, 23 Ottobre 2020)

NB: alcuni di questi esercizi potrebbero essere già stati proposti (o addirittura risolti) dal professore.

(1) Sia $(X, <)$ un insieme totalmente ordinato con almeno due elementi.

(a) Verificare che la famiglia dei sottoinsiemi di X del tipo $(-\infty, y) = \{x \in X \mid x < y\}$ e $(y, \infty) = \{x \in X \mid y < x\}$ è la sottobase per una topologia τ su X. Questa topologia è detta topologia di ordine (indotta da $<$, se è necessario fare riferimento all'ordine).
L'unione della famiglia è tutto X, quindi è una sottobase.

(b) Una base per τ è data dalla famiglia degli insiemi del tipo $(-\infty, y) = \{x \in X \mid x < y\}$, $(y, \infty) = \{x \in X \mid y < x\}$ e $(y, z) = \{x \in X \mid y < x < z\}$ (se X non ha massimo e non ha minimo, è sufficiente la famiglia degli insiemi del terzo tipo). Nel caso di $\mathbb{R}$ con l'ordine consueto, τ è la topologia euclidea.
L'intersezione di due elementi della sottobase data in (a) è ancora un elemento della sottobase, oppure il vuoto, oppure un elemento del terzo tipo. Se X non ha massimo e non ha minimo, ogni elemento della sottobase è unione di elementi del terzo tipo, infatti $(y, \infty) = \bigcup_{x>y}(y, x)$.

(c) Sia $X = \mathbb{N}$, con l'ordine consueto. Quale è la topologia d'ordine associata?
Discreta. $\{0\} = (-\infty, 1)$ *e per* $n > 0$ $\{n\} = (n-1, n+1)$

(d) Sia $X = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, dove ω è un elemento non appartenente ad $\mathbb{N}$ e si suppone che $n < \omega$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (l'ordine fra gli elementi di $\mathbb{N}$ resta quello consueto). In questo modo si ottiene un ordine totale. Quali sono i punti isolati nella topologia d'ordine?
Per lo stesso argomento di (c) i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati. Invece ogni intorno di ω deve contenere un aperto del tipo (n, ∞), quindi contiene altri elementi di $\mathbb{N}$.

(e) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dotati della topologia di sottospazio: $Y = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. $Z = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$. Sono omeomorfi fra di loro? Sono omeomorfi allo spazio del punto precedente?

0 1

2

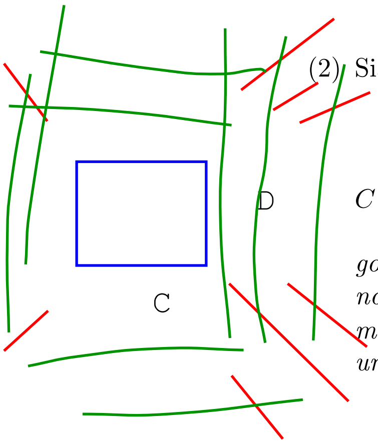
Non sono omeomorfi fra di loro: tutti i punti di Z sono isolati, invece $\{1\}$ non è isolato in Y. ogni intorno di omega o di 1 contiene tutti gli altri punti tranne un numero finito
Ma Y è omeomorfo ad X. Un omeomorfismo deve mandare 1 in ω.

(f) Gli insiemi Y e Z del punto precedente possono essere cosiderati insiemi totalmente ordinati (i loro elementi si confrontino fra loro in quanto numeri reali).
In quanto insiemi ordinati, X, Y e Z dei due punti precedenti sono isomorfi (esistono biiezioni che conservano l'ordine). Quindi su Z la topologia d'ordine è diversa[1] dalla topologia di sottospazio indotta da

[1] In generale: se X è totalmente ordinato e $Y \subset X$, allora Y diventa un insieme totalmente ordinato considerando la restrizione di $<$ ad Y. Quindi ad Y possiamo assegnare due topologie: la topologia σ indotta come sottospazio dalla topologia d'ordine τ su X e la topologia τ_Y definita cone in (a) e (b), ma facendo riferimento all'ordine su Y. Queste due topologie su Y non sempre coincidono!

$\mathbb{R}$.

Morale: nella maggior parte dei casi le costruzioni che effettuiamo combaciano (o sono compatibili) fra di loro. Ma non sempre è così, quindi è necessario sempre controllare con attenzione che due costruzioni simili diano effettivamente lo stesso risultato.



(2) Siano X e Y spazi topologici e sia $X \times Y$ dotato della topologia prodotto.

Se $C \subseteq X$ e $D \subseteq Y$ sono chiusi, è vero che $C \times D$ è un chiuso di $X \times Y$?

Sì, il complementare è un aperto: $(C \times D)^{\complement} = (C^{\complement} \times Y) \cup (X \times D^{\complement})$.

È vero che ogni chiuso di $X \times Y$ è l'intersezione di "rettangoli" del tipo $C \times D$ come sopra?

In generale, no. Una intersezione di "rettangoli" è ancora un "rettangolo", ma esistono chiusi che non sono rettangoli. Se A e B sono aperti non vuoti e non coincidono con tutto lo spazio, allora $(A \times B)^{\complement}$ è un chiuso ma non è un rettangolo (per la stessa formula di prima). Ma $(A \times B)^{\complement}$ è unione di due "rettangoli".

Se no, sapreste caratterizzare i chiusi di $X \times Y$ in termini di "rettangoli"?

Siccome un aperto di $X \times Y$ è unione di aperti del tipo $A \times B$, allora un chiuso è intersezione di sottoinsiemi del tipo $(A \times B)^{\complement}$, cioè intersezione di unioni finite di chiusi del tipo $C \times D$.

Siccome $C \times D$ è un chiuso, se C e D sono chiusi, e siccome essere chiuso è conservato sia per unioni finite che per intersezioni arbitrarie, i chiusi di $X \times Y$ sono esattamente le intersezione di unioni finite di chiusi del tipo $C \times D$. (ovviamente, per quanto detto sopra, ci si può limitare a "rettangoli" speciali del tipo $C^{\complement} \times Y$ e $X \times D^{\complement}$)

(3) Sia X uno spazio topologico e sia $X \times X$ lo spazio prodotto. Sia $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$ con la topologia di sottospazio indotta da $X \times X$.

È vero che D è omeomorfo ad X? x -> (x,x)

Sì, basta controllare chi è $(A \times B) \cap D$ con A, B ...

(A inters. B) x (A inters B)

oppure con le proprietà caratteristiche
(vedi in fondo)

(4) (Premessa: il professore ha dato la definizione di prodotto di una famiglia qualunque di spazi topologici; in particolare, di tre spazi topologici. In questo esercizio vediamo cosa succederebbe se la definizione di prodotto di tre spazi topologici fosse stata data "passo per passo", definendo prima $X_1 \times X_2$, poi $(X_1 \times X_2) \times X_3$.)

Se X_1 e X_2 sono spazi topologici, chiamiamo *base standard* per la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ la famiglia degli aperti del tipo $A_1 \times A_2$, con A_i aperto di X_i, $i = 1, 2$. Sia X_3 un altro spazio topologico.

(a) È vero che la famiglia $\mathcal{B}$ degli insiemi del tipo $(A_1 \times A_2) \times A_3$, con A_i aperto di X_i, $i = 1, 2, 3$ è la base per una topologia su $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

si', inters. di due elementi di B sta ancora in B; ricopre

(b) È la base standard di $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

Ad essere strettamente formali, no. Un elemento della base standard di $(X_1 \times X_2) \times X_3$ è del tipo $A \times A_3$, con A aperto qualunque di $X_1 \times X_2$.

(c) È una base per la topologia prodotto su $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

si', ogni elemento della base standard di (b) è unione di elementi di B (di a)

(d) È vero che $(X_1 \times X_2) \times X_3$ è omeomorfo a $X_1 \times (X_2 \times X_3)$? È vero che $(X_1 \times X_2) \times X_3$ è omeomorfo a $\prod_{i \in I} X_i$, con $I = \{1, 2, 3\}$, dove $\prod_{i \in I} X_i$ è definito nelle dispense (in generale, per una famiglia arbitraria di indici)? Sapreste dimostrarlo usando la proprietà caratteristica del prodotto? v. altro file base A1 x A2 x A3

(5) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una sequenza infinita di spazi topologi.

(a) È vero che se ciascun X_i ha la topologia discreta, allora $\prod_{i \in I} X_i$ ha la topologia discreta?
NO, se l'insieme degli X_i con almeno due elementi è infinito. . Ogni punto dovrebbe essere aperto, quindi unione di elementi della base standard, ma ogni elemento di questa base ha almeno due punti, anzi infiniti. Infatti compaiono infiniti fattori del tipo X_i (anche qui si usa l'assioma di scelta).

(b) Sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ si può definire un'altra topologia, detta la topologia box. Una base per questa topologia box è dato dalla famiglia $\mathcal{B}_b$ dei prodotti del tipo $\prod_{i \in I} A_i$, con ciascun A_i aperto di X_i. Verificare che $\mathcal{B}_b$ è la base per una topologia più fine =forte della consueta topologia prodotto.[2]
L'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}_b$ è ancora un elemento di $\mathcal{B}_b$. Tutto il prodotto è un elemento di $\mathcal{B}_b$. Ogni elemeto della base standard è elemento di $\mathcal{B}_b$.
Se I fosse invece finito, la topologia box coincide con la topologia solita.

(c) Trovare un esempio di prodotto infinito per cui la topologia box è strettamente più fine della topologia prodotto.
Basta usare (a). Con il prodotto box un prodotto di spazi con la topologia discreta ha ancora la topologia discreta.

(d) Consideriamo ancora un'altra famiglia sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} X_i$: la famiglia $\mathcal{B}_\omega$ dei prodotti del tipo $\prod_{i \in I} A_i$ tali che ciascun A_i è un aperto di X_i e, inoltre, l'insieme $J = \{j \in I \mid A_j \neq X_j\}$ è finito o numerabile[3].
Verificare che $\mathcal{B}_\omega$ è la base per una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$. Questa topologia è detta topologia box numerabile.
L'intersezione di due elementi B_1 e B_2 di $\mathcal{B}_b$ è ancora un elemento di $\mathcal{B}_b$, bisogna però controllare la condizione su J. Se J_1 e J_2 corrispondono a B_1 e B_2, allora il J che corrisponde a $B_1 \cap B_2$ è contenuto in $J_1 \cup J_2$ quindi è finito o numerabile.

(e) Verificare che se I è non numerabile, ciascun X_i ha almeno due elementi e la topologia discreta, allora tutte e tre le precedenti topologie sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ sono distinte.
Box: viene ancora la topologia discreta.

---

[2]Da un punto di vista storico, la topologia box è stata scoperta prima della topologia che oggi viene comunemente chiamata topologia prodotto. Quest'ultima topologia si è rivelata molto più conveniente perchè, come vedrete, un prodotto di spazi topologici compatti - la definizione verrà data in seguito - è ancora compatto. Questo non è vero per la topologia box. Inoltre, da un punto di vista moderno, la proprietà caratteristica si è rivelata estremamente importante.

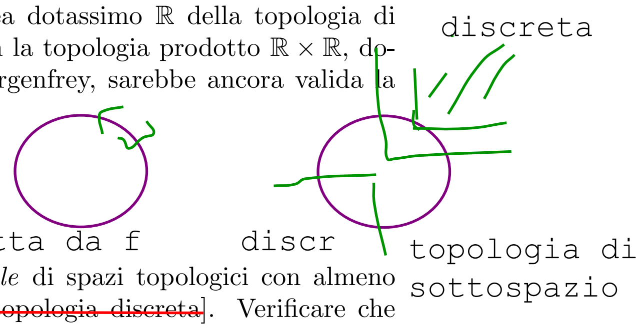
[3]Ricordiamo che un insieme si dice *numerabile* se è finito, oppure si può mettere in corripondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Per alcuni autori "numerabile" va inteso nel senso più ristretto che esiste una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, quindi si esclude il caso finito. Per evitare equivoci, cercheremo di essere sempre espliciti a riguardo.

Se $K \subseteq I$ è infinito numerabile e $x_k \in X_k$, per $k \in K$, allora $(\prod_{k \in K} \{ x_k \}) \times (\prod_{i \in K \setminus I} X_i)$ è nella topologia box numerabile, ma non nella topologia prodotto usuale. La dimostrazione è come in (a)

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to S^1$ la funzione data da $f(r) = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$.

(a) Verificare che se $\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea, allora la topologia quoziente indotta da f su S^1 è la topologia di sottopazio indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

(b) Se al posto della topologia euclidea dotassimo $\mathbb{R}$ della topologia di Sorgenfrey e considerassimo $\mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ ha sempre la topologia di Sorgenfrey, sarebbe ancora valida la conclusione del punto precedente?



(7) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia *non numerabile* di spazi topologici con almeno due elementi ~~[*non servirebbe* e con la topologia discreta]~~. Verificare che $X = \prod_{i \in I} X_i$ non è metrizzabile.

Osserviamo che se X fosse metrizzabile, allora ogni fattore sarebbe metrizzabile, poichè ogni fattore è omeomorfo ad un sottospazio di X, come dimostrato a lezione.

fisso un punto x di X

Supponiamo per assurdo che X sia metrizzabile e dimostriamo che nessun punto di X ha un sistema fondamentale di intorni numerabile, ottenendo un assurdo. Supponiamo il contrario. Ogni intorno U_n contiene un elemento della base, sia J_n l'insieme (finito) degli indici per cui i fattori non sono tutto X_i. Se $J = \cup_n J_n$, allora J è finito o numerabile. Quindi esiste $j \in I \setminus J$. Siccome X_j è metrizzabile (in particolare, di Hausdorff) e con almeno due punti, esiste un aperto di A_j di X_j diverso da tutto X_j.

Ma allora il prodotto di Bi con tutti i Bi=Xi tranne Bj che pongo =Aj è intorno di x, dovrebbe contenere un Un, assurdo.

Esercizio 3 con le prop. caratteristiche.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, "Id"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "Id"] \arrow[dd, dashed, bend left] & \\
& D \arrow[d, "i"'] & \\
X & X \times X \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$x \xrightarrow{f} (x,x)$$

continua per la propr. car. del prodotto

continua per la propr. car. di sottosp.

anche l'inversa di f è continua perchè composta di i e π_1 funzioni continue