Esercizi di Topologia (assiomi di Kuratowski, ancora su sottospazi e omeomorfismi, prodotti, 14 Ottobre 2020)

NB: alcuni di questi esercizi potrebbero essere già stati proposti (o addirittura risolti) dal professore.

NB: d'ora in poi, quando si parlerà di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, si intenderà che è dotato della topologia euclidea, se non precisato diversamente. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ od $\mathbb{R}^n$, si intenderà dotato della topologia indotta, o di sottospazio, sempre se non viene specificato diversamente.

NB: limitatamente agli esercizi del corso di Geometria 3, i simboli $\subseteq$ e $\subset$ hanno **esattamente lo stesso significato**, cioè di "contenuto" nel senso di "contenuto propriamente oppure uguale". I motivi sono dovuti esclusivamente ad automatismi del mio sistema di scrittura.

(1) Verificare che se X è uno spazio topologico, $A, B \subset X$ e $A \cap B = \emptyset$, allora $\mathring{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Si può dimostrare direttamente per assurdo: se $\mathring{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, si prenda un punto x nell'intersezione, allora $\mathring{A}$ è un intorno di x, quindi interseca B ...

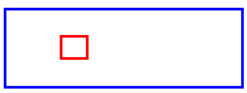
Più ~~direttamente~~, $A \cap B = \emptyset$ è equivalente a $B \subset A^{\complement}$. Per una proprietà della chiusura, $\overline{B} \subset \overline{A^{\complement}}$, che è equivalente a $\overline{B} \cap \overline{A^{\complement}}^{\complement} = \emptyset$. Quindi $\mathring{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

(2) Se X è uno spazio topologico e $Z \subset Y \subset X$ allora la topologia su Z indotta dalla topologia di sottospazio su Y indotta da X è uguale alla topologia di sottospazio su Z indotta da X. È già stato osservato un risultato più generale? *Esercizio 4.3.8, topologia indotta da mappa composta*

(3) Verificare che, per ogni n, la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia euclidea.

È un caso particolare della proposizione che riguarda le distanze, Proposizione 6.1.2 (dal caso $n = 2$ segue il caso finito per induzione).

Direttamente: (ad esempio, $n = 2$) un rettangolo [elemento della base standard per il prodotto] è unione di quadrati (palle per d_∞)



(4) Il prodotto di due spazi topologici con la topologia discreta ha ancora la topologia discreta? *Sì, ogni punto è un chiuso.*

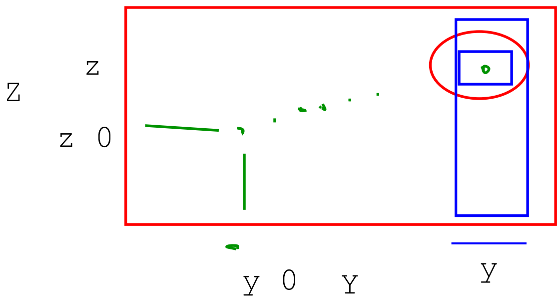
Il prodotto di due spazi topologici con la topologia indiscreta ha ancora la topologia indiscreta? *Sì,* $\emptyset \times \emptyset$, $\emptyset \times Z = \emptyset$, $Y \times \emptyset = \emptyset$, $Y \times Z$

Sia $X = Y \times Z$, dove Y ha la topologia discreta e Z ha la topologia indiscreta. È sempre vero che X è l'unione di due aperti non vuoti e disgiunti? *Sì, purché* Y *abbia almeno due punti.* {y} × Z aperto anche (Y-{y}) × Z aperto

(5) Si dice che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio topologico X converge ad un elemento $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$, per ogni $n \geq m$.

Quali sono le successioni convergenti in uno spazio con la topologia discreta? *Solo quelle costanti da un certo punto in poi.* Con la topologia indiscreta? *Tutte le successioni convergono. E ogni successione converge ad ogni punto!*

(6) Sia $X = Y \times Z$ e siano $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni ad elementi in Y e Z. Dimostrare che la successione $(y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ad elementi in X converge ad $x = (y, z)$ se e solo se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y in Y e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z in Z.



(7) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, e sia $K : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ definita da:

$K(\emptyset) = \emptyset$,
$K(A) = \mathbb{N}$ se A è infinito,
$K(A) = [0, 1 + \max(A)]$, se A è finito e non vuoto.

(a) Quali fra le seguenti proprietà sono soddisfatte da K?
(K1) $K(\emptyset) = \emptyset$,
(K2) $A \subset K(A)$, per ogni $A \subset \mathbb{N}$,
(K3) $K(A) = K(K(A))$, per ogni $A \subset \mathbb{N}$, *tutte tranne questa*
(K4) $K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$, per ogni $A, B \subset \mathbb{N}$,
(K5) Se $A \subset B$, allora $K(A) \subset K(B)$.

(b) Diciamo che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ è un K-chiuso se $K(A) = A$. L'insieme dei complementari dei K-chiusi è una topologia τ?

Sì, i K-chiusi sono solo $\emptyset$ e $\mathbb{N}$. Quindi τ è la topologia indiscreta.

(c) Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, quale è l'operazione di chiusura $\overline{}$ corrispondente a τ?
$\overline{\emptyset} = \emptyset$, *in tutti gli altri casi* $\overline{A} = \mathbb{N}$

(d) In generale, anche se τ non è una topologia, è vero che per ogni $A \subset \mathbb{N}$ esiste il più piccolo K-chiuso che contiene A? Sapreste descriverlo? e se fosse stato K(A)=[0,max(A)]?
viene una topologia
chiusi [0,n]
aperti [m, infinito)

(8) Sia $\mathbb{Z}_6$ il gruppo degli interi modulo 6. Se $A \subset \mathbb{Z}_6$, sia $K(A)$ il più piccolo sottogruppo di $\mathbb{Z}_6$ che contiene A. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente.

(a) tutte tranne K1 e K4 {0,3} {0,2,4}

(b) No, il $\emptyset$ non è un K-chiuso. E comunque l'unione di due K-chiusi non sempre è un K-chiuso (esempio $\{0, 2, 4\}$ *e* $\{0, 3\}$ *)*

(d) Sì, l'intersezione di una qualunque famiglia di sottogruppi è un sottogruppo, quindi il più piccolo K-chiuso che contiene A è l'intersezione di tutti i sottogruppi che contengono A. (Tutti questi ragionamenti valgono per qualunque gruppo al posto di $\mathbb{Z}_6$)

(9) Sia $\mathbb{Z}_4$ l'anello degli interi modulo 4. Se $A \subset \mathbb{Z}_4$, sia $K(A) = \{a^2 \mid a \in A\}$. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio (7).

(a) Tutte tranne K2. Ad esempio, $K(\{3\}) = \{1\}$.
(b) No, $\mathbb{Z}_4$ non è un K-chiuso.
(c) No, $\mathbb{Z}_4$ non è contenuto in nessun K-chiuso

[NB: qui invece stiamo usando la struttura particolare di $\mathbb{Z}_4$, considerando altri gruppi le risposte potrebbero cambiare]

(10) (Lo scopo di questo esercizio non è di creare un rompicapo, ma di spiegare che, mentre l'intuizione è sicuramente molto importante per comprendere la topologia, a volte l'intuizione porta a conclusioni errate)

(a) Sapendo che l'intervallo $(0,1)$ non può esere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti (verrà dimostrato in seguito), dimostrare che $(0,1)$ non è omeomorfo a $(0,1)\cup(1,2)$. *Se ci fosse un omeomorfismo, l'inversa manderebbe i due aperti non vuoti disgiunti* $(0,1)$ *e* $(1,2)$ *in due aperti non vuoti disgiunti di* $(0,1)$

(b) Se $a < b \in \mathbb{R}$, si definisca $(a,b)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b\}$. Dimostrare che se $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $c < d$, allora $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c,d)_{\mathbb{Q}}$ sono omeomorfi (si dia per nota la seguente affermazione: se $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c < d$, allora esiste una funzione biunivoca $f : (a,b)_{\mathbb{Q}} \to (c,d)_{\mathbb{Q}}$ che conserva l'ordine, cioè $x < y$ se e solo se $f(x) < f(y)$, per ogni x, y tali che $a < x < y < b$. La dimostrazione di questa affermazione non è difficile, si può svolgere per induzione utilizzando il fatto che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Comunque la dimostrazione esula dagli argomenti del corso. Naturalmente, se a,b,c,d sono razionali, la dimostrazione è più semplice ed è analoga al caso degli intervalli reali [*Dispense, Esercizio 4.4.4*]).

oppure: successioni di razionali che convergono ad a, b, c, d. Tutti gli intervalli del tipo (x_n,x_n+1) sono omeomorfi (come 4.4.4). "Unisco" tutti questi omeomorfismi (i punti vanno trattati a parte). Lo scrivo come esercizio a parte in un prossimo foglio.

Vista la proprietà enunciata, f manda intervalli aperti ad estremi razionali in intervalli aperti, e lo stesso per l'inversa. Questo è sufficiente a dimostrare che f è omeomorfismo, poichè gli intervalli aperti ad estremi razionali sono una base di $\mathbb{R}$, quindi la famiglia delle loro intersezioni con $\mathbb{Q}$ sono una base per la topologia indotta. Infine, per verificare la continuità di una funzione basta lavorare sugli aperti di una base.

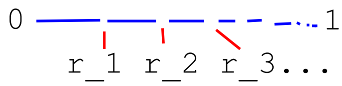
(c) Dimostrare che, in contrasto con (a), $(0,1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $(0,1)_{\mathbb{Q}} \cup (1,2)_{\mathbb{Q}}$ (suggerimento: considerare un numero irrazionale r compreso tra 0 e 1, considerare gli intervalli $(0,r)_{\mathbb{Q}}$ e $(r,1)_{\mathbb{Q}}$ e usare la parte (b)).

A differenza del caso reale, in cui (intuitivamente) r "spezzerebbe" l'intervallo, qui r non appartiene a $\mathbb{Q}$. In altre parole, $(0,1)_{\mathbb{Q}} = (0,r)_{\mathbb{Q}} \cup (r,1)_{\mathbb{Q}}$, *poiché r è stato scelto irrazionale*

$$\Big\downarrow \text{omeom} \qquad \Big\downarrow \text{omeom}$$

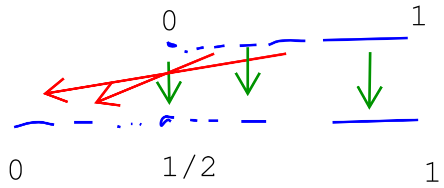
$$(0,1)_{\mathbb{Q}} \cup (1,2)_{\mathbb{Q}}$$

(d) Dimostrare che $(0,1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)_{\mathbb{Q}}$ (suggerimento: considerare una successione crescente di numeri irrazionali che converge ad 1).



omeom $(0,1)_Q \cup (1,2)_Q \cup (2,3)_Q \ldots$

(e) * Dimostrare che (anche se è controintuitivo!) $(0,1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $[0,1)_{\mathbb{Q}}$, dove, naturalmente, $[0,1)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid 0 \le c < 1\}$.



vedi https://math.stackexchange.com/questions/1297298/explicit-homeomorphism-between-open-and-closed-rational-intervals

(f) In generale, un difficile teorema di Sierpinski afferma che tutti gli spazi metrici numerabili e senza punti isolati sono omeomorfi (come spazi topologici) a $\mathbb{Q}$. Non si chiede di dimostrare il teorema, ma è vero che gli esercizi precedenti sono una conseguenza del Teorema di Sierpinski?

Sì (tranne (a)): sono tutti spazi metrici con la metrica indotta da quella su $\mathbb{R}$, non hanno punti isolati.