

Esercizi di Topologia (definizione di topologia, funzioni continue, basi, 2 Ottobre 2020)

- (1) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Ricordiamo che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

(a) Dire quali delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono topologie su $\mathbb{N}$.

(A) Tutti i sottoinsiemi finiti;

(B) Tutti i sottoinsiemi infiniti;

(C) Tutti i sottoinsiemi finiti più $\mathbb{N}$;

(D) Tutti i sottoinsiemi infiniti più l'insieme vuoto; $(\{1\} \cup P) \cap D \notin$ → P=pari, D=dispari

(E) Tutti gli insiemi del tipo $(n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n < m\}$,

al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto. 0 non appartiene a nessuno

(F) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$, n →

al variare di n in $\mathbb{N}$; più l'insieme vuoto. _____

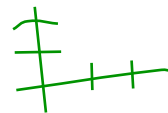
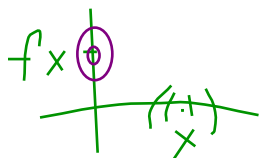
(G) Tutti gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$, m

al variare di n nell'insieme dei numeri naturali pari; più l'insieme vuoto.

(b) Lo stesso esercizio, sostituendo ovunque $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi, al posto di $\mathbb{N}$. mai

(c) Dire se la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ è una topologia su $\mathbb{Z}$: la famiglia degli insiemi del tipo $\mathbb{Z}_{m,n} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq -m, \text{ oppure } z \geq n\}$, al variare di $m, n \in \mathbb{N}$. E se si aggiunge alla famiglia l'insieme vuoto? sì

2



(a) $\Rightarrow$ (c)

(2) Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Se $x \in X$, verificare che le condizioni seguenti sono equivalenti.

- (a) f è continua in x .
- (b) Per ogni aperto N di (Y, σ) tale che $f(x) \in N$ esiste un aperto M di (X, τ) tale che $x \in M$ e $f(M) \subset N$.
- (c) La controimmagine di ogni intorno di $f(x)$ è un intorno di x . preimmagine

*Fornire un controesempio che mostra che le condizioni precedenti *non* sono equivalenti a

- (d) La controimmagine di ogni aperto a cui appartiene $f(x)$ è un aperto che contiene x . NB: stiamo parlando di continuità in un punto, non globalmente!!!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \text{ se } x \leq 0 \\ f(x) = 1 \text{ se } x > 0$$

continua in tutti i punti tranne 0, ma la preimmagine di $(-1/2, 1/2)$ non è aperto.

Basta prendere $x < 0$.



- (3) Siano X, Y, Z spazi topologici e $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ funzioni (non necessariamente continue) ed $h = g \circ f$ quindi $h : X \rightarrow Z$.

È vero che se f e g sono chiuse, allora anche h è chiusa?

È vero che se f e g sono aperte, allora anche h è aperta?

È vero che se f e g sono omeomorfismi, allora anche h è un omeomorfismo?



continua biunivoca e chiusa

- (4) È vero che ogni topologia è anche una base? Se sì, è sempre una base per se stessa? sì

Quali delle famiglie definite nell'esercizio (1) sono basi per qualche topologia?

- (5) Siano $X_1 = \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, $X_2 = \mathbb{N}$, $X_3 = \mathbb{Z}$, $X_4 = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $X_5 = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $X_6 = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

In ciascun caso, sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{x \in X_i \mid a < x < b\}$, con $a < b \in X_i$. (NB: qui a e b devono appartenere ad X_i , non sono numeri reali qualunque)

In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per una topologia? In quali casi $\mathcal{B}_i$ è la base per la topologia discreta?

1, 5	(()) (()) (	2, 4, 6: 0 non sta in nessun elemento	3 sì top discr (z-1, z+1)
topologia di sottospazio indotta dalla top euclidea su $\mathbb{R}$			

- (6) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.
- (a) Sia $\mathcal{B}_1$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_1$ è la base per una topologia τ_1 su $\mathbb{R}$. Verificare che τ_1 è la topologia euclidea.
 - (b) Sia $\mathcal{B}_2$ la famiglia degli intervalli chiusi del tipo $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$, con $a \leq b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_2$ è la base per una topologia τ_2 su $\mathbb{R}$. discreta $[a, a] = \{a\}$
 - (c) Sia $\mathcal{B}_3$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_3$ è la base per una topologia τ_3 su $\mathbb{R}$ (viene chiamata topologia di Sorgenfrey).
 - (d) Sia $\mathcal{B}_4$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $(a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$, con $a < b \in \mathbb{R}$. Verificare che $\mathcal{B}_4$ è la base per una topologia τ_4 su $\mathbb{R}$. Sorgenfrey "alla rovescia"
 - (e) Verificare che le topologie $\tau_1 \dots \tau_4$ sono tutte distinte. $[a, b)$ aperto in (c)
 - (f) Per quali i e j la funzione identica da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ è continua non in (a), (d) da $(\mathbb{R}, \tau_i)$ ad $(\mathbb{R}, \tau_j)$?
 - (g) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau_3)$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_4)$. $x \mapsto -x$
 - (h) Sapreste dare una caratterizzazione più semplice di τ_2 ?

- (7) Sia X un insieme e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi per due topologie, rispettivamente, τ_1 e τ_2 su X . Verificate che $\tau_1 = \tau_2$ se e solo se ogni elemento di $\mathcal{B}_1$ è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}_2$, e viceversa.

- (8) (a) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. (NB: qui a e b variano in $\mathbb{Q}$, non in $\mathbb{R}$).
- (b) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti del tipo $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia euclidea.
- (c) Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli semiaperti del tipo $[a, b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, con $a < b \in \mathbb{Q}$. Verificare che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$. Si tratta della topologia di Sorgenfrey? (vedi esercizio sopra)

In tutti i casi l'unione è tutto lo spazio e l'intersez. di due intervalli di quel tipo è ancora un intervallo di quel tipo quindi si tratta di basi.

(a) e (b): sì, perchè ogni intervallo con estremi reali è unione di intervalli con estremi razionali (rispettivamente, irrazionali).

(c) No, perchè un intervallo del tipo $[r, b)$ con r irrazionale è aperto nella topologia di Sorgenfrey, ma non è aperto nella topologia data da (c) (se voglio che r stia in un aperto, deve stare almeno in un elemento della base...)

$$r \text{ in } [a, c) \quad a < r$$

(9) Sia X un insieme e siano τ e σ due topologie su X .

- Verificare che $\tau \cap \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ e } U \in \sigma\}$ è una topologia su X . $\tau \cap \sigma$ è la topologia più forte fra le topologie che sono più deboli sia di τ che di σ .
- La famiglia $\tau \cup \sigma = \{U \subseteq X \mid U \in \tau \text{ oppure } U \in \sigma\}$ è una topologia su X ? È una base per qualche topologia? È una sottobase per qualche topologia?
- intersezioni finite ed unioni infinite ci stanno. Ogni topologia più debole contiene solo (in generale, alcuni fra gli) aperti di quel tipo.
- In generale, no, perchè se $U \in \tau$, $V \in \sigma$, non è detto che $U \cap V$ stia in $\tau \cup \sigma$. Controesempio:
 τ continuità superiore e σ continuità inferiore (dimostra che, in generale, $\tau \cup \sigma$ non è nemmeno una base).
 Però è una sottobase (l'unione è tutto), anzi, è la sottobase per la topologia più debole tale che...



(10) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua fra spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) .

(a) È vero che se $\mathcal{B}$ è una base per σ , allora $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base per qualche topologia τ' su X ? È una base per τ ?

(b) È vero che se $\mathcal{C}$ è una base per τ , allora $f(\mathcal{C}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{C}\}$ è una base per qualche topologia σ' su Y ? È una base per σ ? È una sottobase?

(b) No, basta prendere f non suriettiva.

Ma anche se f fosse suriettiva, non è detto che sia un base.

Ad esempio, $X = \{a, b, c, d\}$, con $\{a, b\}, \{c, d\}$ gli unici aperti non banali, $Y = \{a', b', d'\}$, con $f(b) = f(c) = b'$...

