Esercizi su gruppo fondamentale (da ricontrollare, 20 dicembre 2020 - 9 gennaio 2021)

(1) Dare l'esempio di una funzione continua f da D^2 a D^2 tale che f non ha nessun punto fisso nell'interno di D^2, cioè tale che non esiste un punto x per cui $|x| < 1$ e $f(x) = x$.
(2) Dare l'esempio di una funzione continua da $[0, 1)$ a $[0, 1)$ senza punto fisso.
(3) Sia X l'interno di D^2, cioè $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$. Trovare una funzione continua $f : X \to X$ che non ha un punto fisso.
(4) Trovare una funzione continua da S^1 in S^1 senza punto fisso.
(5) Dare l'esempio di uno spazio topologico X semplicemente connesso e di un punto $x \in X$ tale che $X \setminus \{x\}$ è connesso per archi, ma non semplicemente connesso.

    Dare l'esempio di uno spazio topologico X connesso per archi ma non semplicemente connesso per cui esiste un punto $x \in X$ tale che $X \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso.
(6) È vero che se X è semplicemente connesso, allora anche ogni suo quoziente è semplicemente connesso?
(7) È possibile calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio con la topologia indiscreta?
(8) È vero che se $f : X \to Y$ è una funzione continua e suriettiva e $x \in X$, allora f_* è suriettiva?

    È vero che se $f : X \to Y$ è una funzione continua ed iniettiva e $x \in X$, allora, f_* è iniettiva?
(9) Se X non è compatto e, per ogni $x \in X$, si ha che $X \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso, segue che X è semplicemente connesso?
(10) Verificare che se $x \in S^2$, allora $S^2 \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso.

    * Dall'osservazione precedente segue che S^2 è semplicemente connesso?
(11) Se $x \neq y \in S^2$, allora $S^2 \setminus \{x, y\}$ è connesso per archi, ma non è semplicemente connesso.
(12) Per ogni $n \geq 2$ il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è isomorfo al gruppo fondamentale di S^{n-1} (qui e nel seguito trattiamo di spazi topologici connessi per archi, quindi il gruppo fondamentale, a meno di isomorfismo, non dipende dal punto scelto).
(13) Determinare il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (x, y, z) \mid x = 0, y = 0 \}$ ($\mathbb{R}^3$ meno una retta).

    In generale, per $n \geq 3$, determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_1 = 0, x_2 = 0 \}$ ($\mathbb{R}^n$ meno un sottospazio di dimensione $n - 2$).
(14) Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^4 \setminus \{ (x, y, z, w) \mid x = 0, y = 0, z = 0 \}$ ($\mathbb{R}^4$ meno una retta) è isomorfo al gruppo fondamentale di S^2.
(15) Dando per noto che S^2 è semplicemente connesso, verificare che $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, S^1, S^2 e S^3 sono a due a due non omeomorfi.
(16) Se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono due punti diametralmente opposti di S^1 in cui f assume lo stesso valore, cioè esiste $x \in S^1$ tale che $f(x) = f(-x)$. (Suggerimento: considerare la funzione $g(x) = f(x) - f(-x)$ e comporla con la funzione $h : [0, 1] \to S^1$ data da $h(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$).
(17) Si può generalizzare l'esirizio precedente nel seguente modo?

Se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono tre punti in S^1 che formano un triangolo equilatero e tali che f assume lo stesso valore in quei punti?

(18) (a) Se $X = U \cup V$ con U e V aperti, e γ è un cammino in X da x a y, allora esiste un numero finito di cammini $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ tali che γ è omotopo a $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ relativamente ad $\{x, y\}$ e ciascun γ_i è contenuto in U oppure è contenuto in V. (Suggerimento: esprimere $\gamma^{-1}(U)$ e $\gamma^{-1}(V)$ come unione di intervalli aperti ed usare la compattezza di $[0, 1]$. Poi esprimere γ come riparametrizzazione del prodotto di opportuni cammini)

(b) Se U è semplicemente connesso e $x, y \in U$, allora due qualunque cammini da x ad y sono omotopicamente equivalenti relativamente ad $\{x, y\}$.

(c) Dedurre da (a) e (b) che se $X = U \cup V$ con U, V aperti e semplicemente connessi e $U \cap V$ è non vuoto e connesso per archi, allora X è semplicemente connesso.

(d) In particolare, se $n \geq 2$, allora S^n è semplicemente connesso

(e) L'ipotesi che $U \cap V$ sia connesso per archi è necessaria in (c)?
L'ipotesi che $U \cap V$ sia non vuoto è necessaria?