

Esercizi su connessione (28 novembre 2020)

- (1) È vero che ogni spazio compatto per successioni è numerabilmente compatto?
- (2) Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea sono chiusi o aperti. Quali sono compatti? Quali connessi?
  - (a)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ;
  - (b)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ;
  - (c)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ ;
  - (d)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ ;
  - (e)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 0\}$ ;
  - (f)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 2\}$ ;
- (3) Se  $X$  non è connesso e  $Y$  è un sottospazio di  $X$ , è sempre vero che  $Y$  non è connesso? Assumendo che  $Y$  sia aperto? Chiuso? Assumendo qualche assioma di separazione?

Nessun sottospazio di  $\mathbb{Q}$  (con la topologia indotta dalla topologia euclidea) con almeno due punti è connesso.

Nessun sottospazio della retta di Sorgenfrey con almeno due punti è connesso.
- (4) È vero che l'intersezione di due sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}$  è connesso?

È vero che l'intersezione di due sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}^2$  è connesso?
- (5) Un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice convesso se, dati due punti  $x, y \in X$ , il segmento che congiunge  $x$  e  $y$  è contenuto in  $X$ .

Quali sono i sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}$ ?

L'unione di due sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$  è convessa? L'unione di due sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$  con intersezione diversa dal vuoto è convessa? Nel caso  $n = 1$ ? L'intersezione?

Un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$  è connesso? L'unione di due sottoinsiemi convessi è connesso? L'unione di due sottoinsiemi convessi con intersezione non vuota è connesso? L'intersezione di due sottoinsiemi convessi è connesso?
- (6) Uno spazio  $X$  tale che ogni punto di  $X$  ha un intorno connesso non è necessariamente connesso.
- (7) Se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici, conoscendo le componenti connesse di  $X$  e  $Y$  sapreste determinare le componenti connesse di  $X \times Y$ ? Dell'unione disgiunta  $X \cup Y$ ?
- (8) Esiste uno spazio infinito totalmente disconnesso e compatto?
- (9) Se  $C$  è una componente connessa di  $X$ , è vero che  $C$  è anche una componente connessa della sua compattificazione di Alexandroff?
- (10) (a) Se  $X$  è connesso, la sua compattificazione di Alexandroff è connessa?  
(b) Se la compattificazione di Alexandroff di  $X$  è connessa, allora  $X$  è connesso?  
(c) Assumendo qualche assioma di separazione?
- (11) Esiste uno spazio connesso per archi che contiene un sottospazio chiuso omeomorfo allo spazio di Cantor?
- (12) Sia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una funzione continua.

Esiste  $x \in [0, 1]$  tale che  $x - f(x) \geq 0$ .  
Esiste  $x \in [0, 1]$  tale che  $x - f(x) \leq 0$ .  
Esiste  $x \in [0, 1]$  tale che  $f(x) = x$ .