Esercizi su compattificazioni (21 Novembre 2020)

Ricordiamo che se $X$ è un sottospazio di uno spazio $Y$, allora $Y$ si dice una *compattificazione*[1] di $X$ se $Y$ è compatto e $X$ è denso in $Y$.

(1) Dare l'esempio di un insieme $X$ con due distanze $d_1$ e $d_2$ definite su $X$ tali che $d_1$ e $d_2$ inducono la stessa topologia su $X$ ma $(X, d_1)$ è totalmente limitato mentre $(X, d_2)$ non è totalmente limitato.

(In altre parole, la totale limitatezza è una nozione metrica ma non topologica.)

(2) Se su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisce la distanza discreta (tutti i punti distinti hanno distanza 1), allora $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ è uno spazio metrico completo.

Se su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisce la seguente distanza: $d(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, allora $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ non è uno spazio metrico completo.

Quindi nemmeno la completezza è una proprietà topologica.

(3) Se $X$ è un sottospazio di $Y$ e $Y$ è compatto, esiste una compattificazione di $X$ contenuta in $Y$?

(4) Esiste una compattificazione di $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$? Esiste una compattificazione che sia $T_2$?

(5) Se $X$ è compatto e $T_2$, allora $X$ stesso è l'unica compattificazione di $X$ che è $T_2$.

(6) Siano $Y_1$ una compattificazione di $X_1$ e $Y_2$ una compattificazione di $X_2$,
- (a) È vero che $Y_1 \times Y_2$ è una compattificazione di $X_1 \times X_2$?
- (b) È vero che se $Y_1$ e $Y_2$ sono disgiunti, allora $Y_1 \cup Y_2$ è una compattificazione di $X_1 \cup X_2$? (la topologia sull'unione è la topologia dell'unione disgiunta)?
- (c) Se $Y_1$ e $Y_2$ sono le compattificazioni di Alexandroff di $X_1$ e $Y_2$, allora è vero che $Y_1 \times Y_2$ è la compattificazione di Alexandroff di $X_1 \times X_2$?
- (d) Se $Y_1$ e $Y_2$ sono le compattificazioni di Alexandroff di $X_1$ e $Y_2$, allora è vero che $Y_1 \cup Y_2$ è la compattificazione di Alexandroff di $X_1 \cup X_2$?

(7) Uno spazio con la topologia discreta è localmente compatto.

(8) Se $X$ è localmente compatto, allora ogni sottoinsieme chiuso (con la topologia di sottospazio) è localmente compatto. È vero per qualunque sottoinsieme (cioè senza assumere che sia chiuso)?

(9) È vero che il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto? L'unione disgiunta?

(10) Se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di spazi topologici non vuoti e $\prod_{i \in I} X_i$ è localmente compatto, allora tutti gli $X_i$ sono compatti tranne al più un numero finito. (Suggerimento: usare le proiezioni.)

(11) Un prodotto infinito di spazi localmente compatti non è necesariamente localmente compatto.

Il prodotto di spazi localmente compatti dotato della topologia box è localmente compatto.

(12) Se $X$ è $T_2$ ma non $T_3$, allora non esiste una compattificazione $K$ di $X$ tale che $K$ sia $T_2$. (Suggerimento: se per assurdo esistesse una compattificazione $T_2$, considerare gli assiomi di separazione che valgono in $K$ e in $X$.)

---

[1] Più in generale, a volte si chiama compattificazione una coppia $(Y, f)$, dove $Y$ è compatto ed $f$ è un omeomorfismo di $X$ in $f(X)$, considerato come sottospazio di $Y$. Il caso che abbiamo considerato è quello in cui $f$ è l'inclusione.

(13) (*) Sia $X$ uno spazio topologico, $\omega \notin X$ e sia $Y$ l'insieme $X \cup \{\omega\}$. È vero che la topologia di Alexandroff è la topologia più forte su $Y$ tale che $Y$ è una compattificazione di $X$?

Sapreste definire una topologia su $Y$ diversa dalla topologia di Alexandroff ma che comunque rende $Y$ una compattificazione di $X$?

(14) Esiste una compattificazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ che sia ottenuta aggiungendo solo un punto e che sia contemporaneamente $T_2$?

(15) (a) Uno spazio topologico $X$ è $T_3$ se e solo se è $T_1$ e inoltre:
per ogni $x \in X$ e per ogni aperto $U$ tale che $x \in U$, esiste un aperto $V$ tale che $x \in V$ e $\overline{V} \subseteq U$.
(b) Se $X$ è $T_2$ e compatto, allora ogni punto di $X$ ha un sistema fondamentale di intorni compatti.
(c) * Se $X$ è $T_2$ e localmente compatto, allora ogni punto di $X$ ha un sistema fondamentale di intorni compatti. (Suggerimento: sia $K$ un intorno compatto di $x$, applicare il punto precedente a $K\ldots$)
(d) Usare il punto precedente per dimostrare che ogni spazio $T_2$ localmente compatto è $T_3$.
L'ipotesi $T_2$ è necessaria?