Esercizi su compattezza (15 Novembre 2020)

(1) Siano X e Y spazi topologici ed $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Sul prodotto insiemistico $A \times B$ si possono definire due topologie.

- Si considerino A e B con le topologie di sottospazio e si dia ad $A \times B$ la topologia prodotto.

- Altrimenti, $A \times B$ si può considerare come un sottoinsieme di $X \times Y$ e ad $A \times B$ si può dare la topologia di sottospazio.

Le due topologie definite sopra coincidono (ad esempio, utilizzare le basi standard).

Si può verificare che queste due topologie coincidono usando le proprietà caratteristiche delle costruzioni coinvolte?

(2) ** Siano X e Y spazi topologici e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Sia $\simeq$ la relazione su $X \times Y$ definita da $(x, y) \simeq (x', y')$ se $x \sim y$ e $y = y'$.

È vero che $(X/\sim) \times Y$ è omeomorfo a $(X \times Y)/\simeq$?

Sapreste enunciare un risultato analogo nel caso in cui anche su Y sia definita una relazione di equivalenza $\approx$?

(3) Sia X uno spazio topologico dotato della topologia cofinita, $f : X \to Y$ una funzione suriettiva, si supponga che Y abbia almeno due elementi e si doti Y della topologia quoziente. Sapreste trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché anche Y abbia la topologia cofinita?

(4) Sia X una spazio topologico e $K \subset X$ un suo sottoinsieme. K si dice *compatto in* X se per ogni famiglia di aperti $(A_i)_{i \in I}$ di X tale che $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, esiste $F \subseteq I$ finito tale che $K \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$.

Verificare che K è compatto in X se e solo se K è compatto come spazio topologico, con la topologia di sottospazio. (Quindi la terminologia non crea ambiguità.)

(5) Sia X uno spazio topologico e siano $H, K \subset X$.

È vero che $H \cup K$ è compatto se e solo se sia H che K sono compatti?

È vero che $H \cap K$ è compatto se e solo se sia H che K sono compatti?

Vale almeno l'implicazione in una delle due direzioni? E assumendo qualche assioma di separabilità?

(6) Esistono spazi topologici in cui ogni successione è convergente? Possono essere T_2 con almeno 2 punti? T_1? T_0?

(7) Se X è un insieme totalmente ordinato senza massimo, allora X con la topologia d'ordine non è compatto.

Esiste un un insieme totalmente ordinato X con massimo e minimo ma tale che X con la topologia d'ordine non è compatto?

(8) * Supponiamo che X sia un insieme totalmente ordinato con le seguenti proprietà:

- per ogni ogni sottoinsieme Y finito o numerabile di X esiste $x \in X$ tale che $y < x$, per ogni $y \in Y$ (in particolare, X non ha massimo)

- ogni sottoinsieme S non vuoto di X ha minimo.

(Un insieme con tali proprietà esiste, ma la dimostrazione va oltre gli scopi del corso.) Dimostrare che X è compatto per successioni (= sequenzialmente compatto) ma non compatto (per l'esercizio precedente). (Suggerimento: se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione, possiamo supporre che uno stesso valore della successione non si ripeta infinite volte. Allora considerare il sottoinsieme S di X costituito dagli elementi $s \in X$ tali che $\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n < s \}$ è infinito.)

(9) Come verificato in un esercizio precedente, se la proprietà (3) di una distanza si indebolisce a

$d(x, x) = 0$, per ogni $x \in X$,

le costruzioni e i risultati in 2.3.3 - 3.0.4 forniscono comunque una topologia. Si tratta di una topologia di Hausdorff? Almeno T_0?

(10) Una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa alle prime due proprietà della distanza e alla proprietà indicata nell'esercizio precedente si chiama *pseudodistanza* (talvolta pseudometrica).

Sia d una pseudodistanza su X e τ la topologia indotta secondo l'esercizio precedente. Si definisca su X la relazione d'equivalenza $x \sim y$ se $d(x, y) = 0$.

Verificare che d induce su $X/\!\sim$ una distanza. Questa distanza induce su $X/\!\sim$ la topologia quoziente determinata da τ su $X/\!\sim$.

(11) Uno spazio topologico si dice *numerabilmente compatto* se ogni ricoprimento aperto infinito numerabile ha un sottoricoprimento finito.

Uno spazio topologico si dice Lindelöf se ogni ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito o numerabile.

Verificare che uno spazio topologico è compatto se e solo se è contemporaneamente numerabilmente compatto e Lindelöf[1].

(12) Uno spazio secondo numerabile (cioè con una base numerabile) è Lindelöf.

$\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è Lindelöf?

(13) Sia X uno spazio topologico e C un suo sottoinsieme chiuso.

Se X è numerabilmente compatto, allora anche C è numerabilmente compatto.

Se X è Lindelöf, allora anche C è Lindelöf.

È necessaria l'ipotesi che C sia chiuso?

(14) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici a due a due disgiunti. Se $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, la topologia dell'unione disgiunta su X è definita da:

$A \subseteq X$ è aperto in X se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i, per ogni $i \in I$.

(a) È vero che X è T_0 se e solo se ogni X_i è T_0 ?

(b) Per gli altri assiomi di separazione?

(c) È vero che se X è compatto, allora ciascun X_i è compatto? Vale il viceversa? Vale il viceversa se I è finito?

(d) Per compattezza numerabile e proprietà di Lindelöf?

(15) Sia di nuovo $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici a due a due disgiunti. Su $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ si può definire un'altra topologia che chiamiamo *somma disgiunta*. Un sottoinsieme A di X è aperto nella topologia somma disgiunta se A è il vuoto, oppure

(i) Per ogni $i \in I$, $A \cap X_i$ è aperto in X_i, e inoltre

(ii) $X_i \subseteq A$ per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito.

Naturalmente, se I è finito, la topologia dell'unione disgiunta e la topologia della somma disgiunta coincidono.

(a) Verificare che si tratta di una topologia.

(b) È vero che X è compatto, se e solo se ciascun X_i è compatto?

---

[1] In alcuni testi antichi di topologia, l'espressione "compatto" indicava gli spazi numerabilmente compatti, e gli spazi che oggi chiamiamo compatti venivano chiamati "bicompatti".

(c) È vero che se ciascun X_i è T_1 allora anche X è T_1?
(d) È vero che se ciascun X_i è T_2 allora anche X è T_2?

(16) Sempre partendo da una famiglia $(X_i)_{i\in I}$ di spazi topologici a due a due disgiunti definiamo una terza topologia, detta *somma di Frolík.*

Sia ω un elemento che non appartiene a nessun X_i. Su $X = \{\omega\} \cup \bigcup_{i\in I} X_i$ si definisca la seguente topologia. Un sottoinsieme A di X è aperto se

(i) $\omega \notin A$ e, per ogni $i \in I$, $A \cap X_i$ è aperto in X_i, oppure

(ii) $\omega \in A$, $A = X_i$ per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito, e $A \cap X_i$ è aperto in X_i, per i rimanenti i.

Discutere compattezza, proprietà di Lindelöf e assiomi di separazione in una somma di Frolík.

(17) * Se $a < b \in \mathbb{R}$, si definisca $(a, b)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b\}$. Dimostrare che se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $c < d$, allora $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c, d)_{\mathbb{Q}}$ sono omeomorfi. (L'esercizio era già stato proposto; qui si suggerisce un metodo alternativo per la soluzione).

(a) Nel caso in cui $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ l'esercizio si può risolvere come nelle dispense, Esercizio 4.4.4.

(b) In generale, siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni a valori razionali, e che convergono ad a, b, c, d, rispettivamente. Si suppone che gli elementi delle successioni siano contenuti nei corrispondenti intervalli, che a_n e c_n siano strettamente decrescenti b_n e d_n siano strettamente crescenti e inoltre $a_0 = b_0$, $c_0 = d_0$.
In base ad (a) e siccome gli elementi delle successioni sono razionali, abbiamo che (a_{n+1}, a_n) è omeomorfo a (c_{n+1}, c_n) etc.
"Unire" questi omeomorfismi per ottenere un omeomorfismo fra $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c, d)_{\mathbb{Q}}$.

(18) *

(a) Si sa che il prodotto di due spazi topologici numerabilmente compatti non è necessariamente numerabilmente compatto. Costruire un controesempio è estremamente difficile (vedi Engelking, Esempio 3.10.19). In questo esercizio si chiede di trovare l'errore nella seguente "Dimostrazione". (In altre parole, perchè la dimostrazione che il prodotto di due spazi compatti è compatto non si applica alla compattezza numerabile?)

"Dimostrazione" (sbagliata) che il prodotto di due spazi topologici numerabilmente compatti è numerabilmente compatto. Siano X e Y numerabilmente compatti e sia $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento *numerabile* di $X \times Y$. Se $\mathcal{U}$ è finito, non c'è niente da dimostrare. Supponiamo quindi che $\mathcal{U}$ sia infinito. Siccome ogni aperto di $X \times Y$ è unione di aperti del tipo $A \times B$, con A aperto di X e B aperto di Y, posso scrivere ogni aperto di U_n in $\mathcal{U}$ come unione di aperti del tipo $A \times B$, diciamo, $U_n = \bigcup_{i\in I_n} (A_i \times B_i)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per certi insiemi I_n dipendenti da n.
L'insieme di tutti gli $A_i \times B_i$ utilizzati in questo modo è un ricoprimento aperto di $X \times Y$. In dettaglio, se $\mathcal{U}'$ è la famiglia $\{\, A_i \times B_i \mid i \in I_n,$ per qualche $n \in \mathbb{N}\,\}$, allora $\mathcal{U}'$ è un ricoprimento aperto di $X \times Y$. In altre parole, se $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, allora $\mathcal{U}'$ è la famiglia $\{\, A_i \times B_i \mid i \in I\,\}$. Trovo adesso un sottoricoprimento finito della famiglia $\mathcal{U}'$. Per ogni

$x \in X$, il sottoinsieme $\{x\} \times Y$ di $X \times Y$ è ricoperto da $\mathcal{U}'$. Quindi $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I}(A_i \times B_i)$. Questo implica che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$. Siccome Y è numerabilmente compatto, allora esiste un insieme finito F_x tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in F_x} B_i$, da cui $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in F_x}(A_x \times B_i)$, dove $A_x = \bigcap_{i \in F_x} A_i$ è aperto poichè intersezione finita di aperti (cf. il "Tube lemma" nelle dispense).
Facendo variare x in X ottengo un ricoprimento $(A_x)_{x \in X}$ di X, che per ipotesi ha un sottoricoprimento finito, diciamo, $A_{x_0}, \ldots, A_{x_h}$. Per costruzione, l'insieme finito degli aperti $A_{x_0} \times B_i$ $(i \in F_{x_0})$, $\ldots A_{x_h} \times B_i$ $(i \in F_{x_h})$ è un ricoprimento di $X \times Y$. Ciascun $A_{x_\ell} \times B_i$ di questo tipo è contenuto nell'elemento $A_i \times B_i$ di $\mathcal{U}'$. Ciascun $A_i \times B_i$ di $\mathcal{U}'$, a sua volta, è contenuto in un elemento U_n di $\mathcal{U}$.
Siccome ho un ricoprimento finito $A_{x_\ell} \times B_i$ e ciascuno di questi aperti è contenuto in un $U_n \in \mathcal{U}$, allora l'insieme finito degli U_n ottenuti in questo modo è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Dov'è l'errore?

(b) Il prodotto di uno spazio compatto con uno spazio numerabilmente compatto è numerabilmente compatto?

(c) Il prodotto di uno spazio compatto con uno spazio Lindelöf è Lindelöf ?

(d) La retta di Sorgenfrey ($\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey) è Lindelöf, ma il suo quadrato non lo è.