

- (1) Sia X uno spazio topologico, $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva e si doti Y della topologia quoziente.
 - (a) Se X ha la topologia discreta, è vero che Y ha la topologia discreta? E per la topologia indiscreta? Per la topologia cofinita?
 - (b) Se Y ha la topologia discreta, è vero che X ha la topologia discreta? E con la topologia indiscreta? Con la topologia cofinita?
 - (c) Se X è uno spazio metrico, è vero che Y è metrizzabile?
 - (d) Sia $X = [0, 1]$ e Y il quoziente ottenuto collassando $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Che topologia ha Y ?
 - (e) Esiste uno spazio topologico T_4 tale che un suo quoziente non è T_0 ?
- (2) Supponiamo che (X, τ) e (Y, σ) siano spazi topologici, con X e Y insiemi disgiunti. Su $X \cup Y$ si può definire una topologia ρ al seguente modo: se $A \subseteq X \cup Y$, allora A è un aperto di ρ se e solo se $A \cap X$ è un aperto di τ e $A \cap Y$ è un aperto di σ . In altre parole, un aperto di ρ è l'unione di un aperto di τ con un aperto di σ (ricordiamo che X e Y sono disgiunti). La topologia ρ è detta *topologia dell'unione disgiunta*.
 - (a) Verificare che ρ è una topologia su $X \cup Y$.
 - (b) È vero che se τ e σ sono la topologia discreta (indiscreta, cofinita) allora anche ρ è la topologia discreta (indiscreta, cofinita)?
 - (c) È vero che se (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff, allora $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff?
È vero che se $(X \cup Y, \rho)$ è di Hausdorff, allora (X, τ) e (Y, σ) sono di Hausdorff?
E per gli altri assiomi di separazione?
 - (d) Siano X e Y sottospazi disgiunti di \mathbb{R} , con la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea. È vero che la topologia dell'unione disgiunta è la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $X \cup Y$?
 - (e) Verificare che X è un sottospazio di $X \cup Y$, lo stesso per Y .
 - (f) ρ è l'unica topologia su $X \cup Y$ tale che X è un sottospazio di $X \cup Y$ ed Y è un sottospazio di $X \cup Y$?
 - (g) Siano $i : X \rightarrow X \cup Y$ e $j : Y \rightarrow X \cup Y$ le (estensioni delle) funzioni identità. Verificare che i e j sono continue, aperte e chiuse. Inoltre ρ è la topologia più forte che rende i e j continue.
 - (h) La topologia dell'unione disgiunta è una topologia coindotta? (vedere l'esercizio 6.3.5 delle dispense...)
 - (i) Siano X ed Y spazi metrici disgiunti, e siano τ e σ le topologie indotte dalle rispettive metriche. Esiste una metrica su $X \cup Y$ che induce la topologia ρ ?
- (3) Se X è un insieme totalmente ordinato, dotato della topologia d'ordine, allora X è T_2 . È T_3 ? (**) È T_4 ?
- (4)
 - (a) In uno spazio T_2 ogni successione convergente converge ad un unico punto.
 - (b) Se X è uno spazio topologico e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_1 .

- (c) Se X è uno spazio topologico primo numerabile e ogni successione convergente converge ad un unico punto, allora X è T_2 .
- (d) * Diamo per noto che esiste un insieme totalmente ordinato X tale che, per ogni sottoinsieme finito o numerabile $A \subset X$ esiste $x \in X$ tale che $a < x$, per ogni $a \in A$.
 Sia X un tale insieme totalmente ordinato e sia $Y = X \cup \{\omega, \rho\}$, dove ω, ρ sono due “nuovi” elementi distinti non appartenenti ad X . Diamo ad Y la topologia generata dalla seguente base \mathcal{B} . Elementi di \mathcal{B} sono tutti i sottoinsiemi aperti di X nella topologia d’ordine. Inoltre sono elementi di \mathcal{B} tutti gli insiemi del tipo $\{\omega\} \cup (x, \infty)$ e $\{\rho\} \cup (x, \infty)$, al variare di $x \in X$.
 Con questa topologia Y è T_1 ma non T_2 .
 In Y ogni successione convergente converge ad un unico punto (usare la proprietà di X enunciata all’inizio),
- (5) (a) Se (X, τ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2) e σ è una topologia più forte di τ , allora anche (X, σ) è T_0 (rispettivamente, T_1, T_2).
- (b) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subset X$. Dire se esiste la topologia più debole fra le topologie che:
 - contengono A , e
 - sono più forti di τ .
- (c) Sia $[0, 1]$ l’intervallo unitario con la topologia euclidea ε , e sia σ la topologia più debole che contiene $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e che è più forte di ε . Verificare che $[0, 1]$ con la topologia σ non è T_3 . Quindi l’analogo della parte (a) non vale per T_3 (e nemmeno T_4).
- (d) Uno spazio con la topologia discreta è T_4 .
- (e) Siano τ_1, τ_2 e τ_3 topologie sullo stesso insieme X , tali che τ_1 è più debole di τ_2 e τ_2 è più debole di τ_3 .
 È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_2 , allora anche (X, τ_2) è T_2 ?
 È vero che se (X, τ_1) e (X, τ_3) sono T_4 , allora anche (X, τ_2) è T_4 ?
 È almeno T_3 , lo spazio (X, τ_2) ?
- (6) Esiste uno spazio topologico che non è T_1 ma tale che, dati due chiusi disgiunti qualunque C e D esistono aperti disgiunti U e V tali che $C \subseteq U$ e $D \subseteq V$?
- (7) Uno spazio topologico X si dice *compatto per successioni* se ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in X ha una sottosuccessione convergente (una sottosuccessione è $(x_i)_{i \in I}$ con I sottoinsieme infinito di \mathbb{N}).
- (a) Verificare che il prodotto di due spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni.
- (b) Se X è compatto per successioni, allora anche ogni sottospazio Y chiuso di X è compatto per successioni.
- (c) Mostrare con un controesempio che l’ipotesi che Y sia chiuso è necessaria nel punto precedente.
- (d) ** Un prodotto numerabile di spazi compatti per successioni è ancora compatto per successioni, ma in generale un prodotto più che numerabile non lo è. (Vedi Engelking Teorema 3.10.35)