Esercizi di Topologia (prodotti, 23 Ottobre 2020)

NB: alcuni di questi esercizi potrebbero essere già stati proposti (o addirittura risolti) dal professore.

(1) Sia $(X, <)$ un insieme totalmente ordinato con almeno due elementi.
  (a) Verificare che la famiglia dei sottoinsiemi di X del tipo $(-\infty, y) = \{x \in X \mid x < y\}$ e $(y, \infty) = \{x \in X \mid y < x\}$ è la sottobase per una topologia τ su X. Questa topologia è detta topologia di ordine (indotta da $<$, se è necessario fare riferimento all'ordine).
  (b) Una base per τ è data dalla famiglia degli insiemi del tipo $(-\infty, y) = \{x \in X \mid x < y\}$, $(y, \infty) = \{x \in X \mid y < x\}$ e $(y, z) = \{x \in X \mid y < x < z\}$ (se X non ha massimo e non ha minimo, è sufficiente la famiglia degli insiemi del terzo tipo). Nel caso di $\mathbb{R}$ con l'ordine consueto, τ è la topologia euclidea.
  (c) Sia $X = \mathbb{N}$, con l'ordine consueto. Quale è la topologia d'ordine associata?
  (d) Sia $X = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, dove ω è un elemento non appartenente ad $\mathbb{N}$ e si suppone che $n < \omega$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (l'ordine fra gli elementi di $\mathbb{N}$ resta quello consueto). In questo modo si ottiene un ordine totale. Quali sono i punti isolati nella topologia d'ordine?
  (e) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dotati della topologia di sottospazio: $Y = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. $Z = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$. Sono omeomorfi fra di loro? Sono omeomorfi allo spazio del punto precedente?
  (f) Gli insiemi Y e Z del punto precedente possono essere cosiderati insiemi totalmente ordinati (i loro elementi si confrontino fra loro in quanto numeri reali).
  In quanto insiemi ordinati, X, Y e Z dei due punti precedenti sono isomorfi (esistono biiezioni che conservano l'ordine). Quindi su Z la topologia d'ordine è diversa[1] dalla topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}$.
  Morale: nella maggior parte dei casi le costruzioni che effettuiamo combaciano (o sono compatibili) fra di loro. Ma non sempre è così, quindi è necessario sempre controllare con attenzione che due costruzioni simili diano effettivamente lo stesso risultato.

(2) Siano X e Y spazi topologici e sia $X \times Y$ dotato della topologia prodotto.
  Se $C \subseteq X$ e $D \subseteq Y$ sono chiusi, è vero che $C \times D$ è un chiuso di $X \times Y$?
  È vero che ogni chiuso di $X \times Y$ è l'intersezione di "rettangoli" del tipo $C \times D$ come sopra?
  Se no, sapreste caratterizzare i chiusi di $X \times Y$ in termini di "rettangoli"?

(3) Sia X uno spazio topologico e sia $X \times X$ lo spazio prodotto. Sia $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$ con la topologia di sottospazio indotta da $X \times X$.
  È vero che D è omeomorfo ad X?

---

[1] In generale: se X è totalmente ordinato e $Y \subset X$, allora Y diventa un insieme totalmente ordinato considerando la restrizione di $<$ ad Y. Quindi ad Y possiamo assegnare due topologie: la topologia σ indotta come sottospazio dalla topologia d'ordine τ su X e la topologia τ_Y definita cone in (a) e (b), ma facendo riferimento all'ordine su Y. Queste due topologie su Y non sempre coincidono!

(4) (Premessa: il professore ha dato la definizione di prodotto di una famiglia qualunque di spazi topologici; in particolare, di tre spazi topologici. In questo esercizio vediamo cosa succederebbe se la definizione di prodotto di tre spazi topologici fosse stata data "passo per passo", definendo prima $X_1 \times X_2$, poi $(X_1 \times X_2) \times X_3$.)

Se X_1 e X_2 sono spazi topologici, chiamiamo *base standard* per la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ la famiglia degli aperti del tipo $A_1 \times A_2$, con A_i aperto di X_i, $i = 1, 2$. Sia X_3 un altro spazio topologico.

(a) È vero che la famiglia $\mathcal{B}$ degli insiemi del tipo $(A_1 \times A_2) \times A_3$, con A_i aperto di X_i, $i = 1, 2, 3$ è la base per una topologia su $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

(b) È la base standard di $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

(c) È una base per la topologia prodotto su $(X_1 \times X_2) \times X_3$?

(d) È vero che $(X_1 \times X_2) \times X_3$ è omeomorfo a $X_1 \times (X_2 \times X_3)$? È vero che $(X_1 \times X_2) \times X_3$ è omeomorfo a $\prod_{i \in I} X_i$, con $I = \{1, 2, 3\}$, dove $\prod_{i \in I} X_i$ è definito nelle dispense (in generale, per una famiglia arbitraria di indici)? Sapreste dimostrarlo usando la proprietà caratteristica del prodotto?

(5) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una sequenza infinita di spazi topologi.

(a) È vero che se ciascun X_i ha la topologia discreta, allora $\prod_{i \in I} X_i$ ha la topologia discreta?

(b) Sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ si può definire un'altra topologia, detta la topologia box. Una base per questa topologia box è dato dalla famiglia $\mathcal{B}_b$ dei prodotti del tipo $\prod_{i \in I} A_i$, con ciascun A_i aperto di X_i. Verificare che $\mathcal{B}_b$ è la base per una topologia più fine della consueta topologia prodotto.[2] Se I fosse invece finito, la topologia box coincide con la topologia solita.

(c) Trovare un esempio di prodotto infinito per cui la topologia box è strettamente più fine della topologia prodotto.

(d) Consideriamo ancora un'altra famiglia sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} X_i$: la famiglia $\mathcal{B}_\omega$ dei prodotti del tipo $\prod_{i \in I} A_i$ tali che ciascun A_i è un aperto di X_i e, inoltre, l'insieme $\{j \in I \mid A_j \neq X_j\}$ è finito o numerabile[3].

Verificare che $\mathcal{B}_\omega$ è la base per una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$. Questa topologia è detta topologia box numerabile.

(e) Verificare che se I è non numerabile, ciascun X_i ha almeno due elementi e la topologia discreta, allora tutte e tre le precedenti topologie sull'insieme prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ sono distinte.

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to S^1$ la funzione data da $f(r) = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$.

---

[2] Da un punto di vista storico, la topologia box è stata scoperta prima della topologia che oggi viene comunemente chiamata topologia prodotto. Quest'ultima topologia si è rivelata molto più conveniente perchè, come vedrete, un prodotto di spazi topologici compatti - la definizione verrà data in seguito - è ancora compatto. Questo non è vero per la topologia box. Inoltre, da un punto di vista moderno, la proprietà caratteristica si è rivelata estremamente importante.

[3] Ricordiamo che un insieme si dice *numerabile* se è finito, oppure si può mettere in corripondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Per alcuni autori "numerabile" va inteso nel senso più ristretto che esiste una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, quindi si esclude il caso finito. Per evitare equivoci, cercheremo di essere sempre espliciti a riguardo.

(a) Verificare che se $\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea, allora la topologia quoziente indotta da f su S^1 è la topologia di sottopazio indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

(b) Se al posto della topologia euclidea dotassimo $\mathbb{R}$ della topologia di Sorgenfrey e considerassimo $\mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ ha sempre la topologia di Sorgenfrey, sarebbe ancora valida la conclusione del punto precedente?

(7) Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia *non numerabile* di spazi topologici, ciascuno con almeno due elementi. Verificare che $\prod_{i \in I} X_i$ non è metrizzabile.