Esercizi di Topologia (assiomi di Kuratowski, ancora su sottospazi e omeomorfismi, prodotti, 14 Ottobre 2020)

NB: alcuni di questi esercizi potrebbero essere già stati proposti (o addirittura risolti) dal professore.

NB: d'ora in poi, quando si parlerà di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, si intenderà che è dotato della topologia euclidea, se non precisato diversamente. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ od $\mathbb{R}^n$, si intenderà dotato della topologia indotta, o di sottospazio, sempre se non viene specificato diversamente.

NB: limitatamente agli esercizi del corso di Geometria 3, i simboli $\subseteq$ e $\subset$ hanno **esattamente lo stesso significato**, cioè di "contenuto" nel senso di "contenuto propriamente oppure uguale". I motivi sono dovuti esclusivamente ad automatismi del mio sistema di scrittura.

(1) Verificare che se $X$ è uno spazio topologico, $A, B \subset X$ e $A \cap B = \emptyset$, allora $\mathring{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

(2) Se $X$ è uno spazio topologico e $Z \subset Y \subset X$ allora la topologia su $Z$ indotta dalla topologia di sottospazio su $Y$ indotta da $X$ è uguale alla topologia di sottospazio su $Z$ indotta da $X$. È già stato osservato un risultato più generale?

(3) Verificare che, per ogni $n$, la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, dove $\mathbb{R}$ è dotato della topologia euclidea.

(4) Il prodotto di due spazi topologici con la topologia discreta ha ancora la topologia discreta?

Il prodotto di due spazi topologici con la topologia indiscreta ha ancora la topologia indiscreta?

Sia $X = Y \times Z$, dove $Y$ ha la topologia discreta e $Z$ ha la topologia indiscreta. È sempre vero che $X$ è l'unione di due aperti non vuoti e disgiunti?

(5) Si dice che una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio topologico $X$ converge ad un elemento $x \in X$ se per ogni intorno $U$ di $x$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$, per ogni $n \geq m$.

Quali sono le successioni convergenti in uno spazio con la topologia discreta? Con la topologia indiscreta?

(6) Sia $X = Y \times Z$ e siano $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni ad elementi in $Y$ e $Z$. Dimostrare che la successione $(y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in $X$ converge ad $x = (y, z)$ se e solo se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad $y$ in $Y$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $z$ in $Z$.

(7) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, e sia $K : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ definita da:

$K(\emptyset) = \emptyset$,

$K(A) = \mathbb{N}$ se $A$ è infinito,

$K(A) = [0, 1 + \max(A)]$, se $A$ è finito e non vuoto.

(a) Quali fra le seguenti proprietà sono soddisfatte da $K$?

(K1) $K(\emptyset) = \emptyset$,

(K2) $A \subset K(A)$, per ogni $A \subset \mathbb{N}$,

(K3) $K(A) = K(K(A))$, per ogni $A \subset \mathbb{N}$,

(K4) $K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$. per ogni $A, B \subset \mathbb{N}$,

(K5) Se $A \subset B$, allora $K(A) \subset K(B)$.

(b) Diciamo che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ è un $K$-chiuso se $K(A) = A$. L'insieme dei complementari dei $K$-chiusi è una topologia $\tau$?

(c) Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, quale è l'operazione di chiusura $\overline{\phantom{A}}$ corrispondente a $\tau$?

(d) In generale, anche se $\tau$ non è una topologia, è vero che per ogni $A \subset \mathbb{N}$ esiste il più piccolo $K$-chiuso che contiene $A$? Sapreste descriverlo?

(e) PS: e se avessimo definito $K(A) = [0, \max(A)]$, per $A$ è finito e non vuoto?

(8) Sia $\mathbb{Z}_6$ il gruppo degli interi modulo 6. Se $A \subset \mathbb{Z}_6$, sia $K(A)$ il più piccolo sottogruppo di $\mathbb{Z}_6$ che contiene $A$. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente.

(9) Sia $\mathbb{Z}_4$ l'anello degli interi modulo 4. Se $A \subset \mathbb{Z}_4$, sia $K(A) = \{a^2 \mid a \in A\}$. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio 7 (7).

(10) (Lo scopo di questo esercizio non è di creare un rompicapo, ma di spiegare che, mentre l'intuizione è sicuramente molto importante per comprendere la topologia, a volte l'intuizione porta a conclusioni errate)

(a) Sapendo che l'intervallo $(0, 1)$ non può esere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti (verrà dimostrato in seguito), dimostrare che $(0, 1)$ non è omeomorfo a $(0, 1) \cup (1, 2)$.

(b) Se $a < b \in \mathbb{R}$, si definisca $(a, b)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b\}$. Dimostrare che se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $c < d$, allora $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ e $(c, d)_{\mathbb{Q}}$ sono omeomorfi (si dia per nota la seguente affermazione: se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c < d$, allora esiste una funzione biunivoca $f : (a, b)_{\mathbb{Q}} \to (c, d)_{\mathbb{Q}}$ che conserva l'ordine, cioè $x < y$ se e solo se $f(x) < f(y)$, per ogni $x, y$ tali che $a < x < y < b$. La dimostrazione di questa affermazione non è difficile, si può svolgere per induzione utilizzando il fatto che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Comunque la dimostrazione esula dagli argomenti del corso. Naturalmente, se $a, b, c, d$ sono razionali, la dimostrazione è più semplice ed è analoga al caso degli intervalli reali). (PS: un metodo alternativo verra' suggerito in un prossimo foglio)

(c) Dimostrare che, in contrasto con (a), $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $(0, 1)_{\mathbb{Q}} \cup (1, 2)_{\mathbb{Q}}$ (suggerimento: considerare un numero irrazionale $r$ compreso tra 0 e 1, considerare gli intervalli $(0, r)_{\mathbb{Q}}$ e $(r, 1)_{\mathbb{Q}}$ e usare la parte (b)).

(d) Dimostrare che $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1)_{\mathbb{Q}}$ (suggerimento: considerare una successione crescente di numeri irrazionali che converge ad 1).

(e) * Dimostrare che (anche se è controintuitivo!) $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ è omeomorfo a $[0, 1)_{\mathbb{Q}}$, dove, naturalmente, $[0, 1)_{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{Q} \mid 0 \le c < 1\}$.

(f) In generale, un difficile teorema di Sierpinski afferma che tutti gli spazi metrici numerabili e senza punti isolati sono omeomorfi (come spazi topologici) a $\mathbb{Q}$. Non si chiede di dimostrare il terorema, ma è vero che gli esercizi precedenti sono una conseguenza del Teorema di Sierpinski?