I NUMERI INFINITESIMI E L'ANALISI NONSTANDARD

MAURO DI NASSO

Introduzione

Nell'*analisi infinitesimale* contemporanea, i numeri infinitesimi non esistono. Storicamente non sempre è stato così. Prima della ricerca fondazionale che portò alla attuale formalizzazione del concetto di numero reale alla fine del XIX secolo, l'uso diretto di quantità infinitesime è stato pratica comune per secoli. Anzi, fu proprio grazie alla manipolazione di quelle "quantità evanescenti" che vennero scoperti molti teoremi fondamentali dell'analisi. Recentemente, all'inizio degli anni Sessanta, il logico matematico Abraham Robinson ha introdotto l'*analisi nonstandard.* Facendo uso della teoria dei modelli, Robinson è riuscito a porre su basi rigorose l'uso dei numeri infinitesimi, dando così una possibile soluzione ad un problema storico. L'analisi nonstandard ha interessanti conseguenze in diversi ambiti. Essa consente di rileggere sotto una nuova prospettiva alcuni aspetti della storia del calcolo, spesso presentati assumendo come necessariamente contraddittorio l'uso delle quantità infinitesime. Più in generale, nell'ambito dell'epistemologia e della filosofia della matematica, i risultati fondazionali di Robinson possono fornire un contributo alla classica discussione sul tema dell'infinito. Nella ricerca, i metodi nonstandard sono stati usati in diverse aree della matematica pura e applicata, portando ad interessanti risultati. Infine l'analisi nonstandard offre spunti rilevanti anche dal punto vista didattico. I numeri infinitesimi ed i loro reciproci infiniti permettono infatti di formalizzare le idee di numero "piccolo" e di numero "grande". Di conseguenza, le nozioni fondamentali del calcolo sono formulabili in termini più semplici e più vicini all'intuizione.

1. Alcuni cenni storici

Già agli albori della antica civiltà greca ed ellenistica, il problema delle quantità infinitesime – collegato al concetto di continuità e di moto – fu un tema centrale della discussione matematico-filosofica (si pensi ai paradossi di Zenone). Euclide nei suoi *Elementi*, datati attorno al 300 A.C., dimostra di essere già consapevole del problema dell'infinitamente piccolo. Nel libro dedicato alla teoria delle proporzioni, si legge la seguente definizione:[1]

> Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente. (Euclide, *Gli elementi*, Libro V, Definizione IV)

Si osservi che l'esistenza di grandezze omogenee che *non* hanno rapporto equivale all'esistenza di grandezze una *infinitesima* rispetto all'altra. Al grandissimo Archimede (287–212 A.C.) era ben nota l'importanza *euristica* delle quantità infinitesime, cioè il loro uso come potente strumento di scoperta matematica. Una

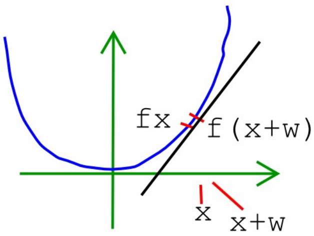
[1] La traduzione è tratta dall'edizione [3].

volta "divinate" le giuste conclusioni, egli provvedeva poi a darne una dimostrazione rigorosa con il cosiddetto metodo di *esaustione*.[2]

Tradizionalmente, l'analisi matematica moderna ha inizio con i metodi elaborati indipendentemente da Isaac Newton (1643–1727) e da Gottfried Leibniz (1646–1716). Quest'ultimo faceva un uso diretto dei numeri infinitesimi. Ad esempio, è dovuta a lui la familiare notazione differenziale df/dx che si basa sulla nozione di incremento infinitesimo. Molti dei teoremi fondamentali del calcolo vennero inizialmente giustificati mediante un esplicito uso di quantità infinitesime.

Accanto all'entusiasmo suscitato dagli straordinari risultati che venivano raggiunti, cominciò presto a diffondersi la preoccupazione che quella nuova matematica fosse costruita su basi logiche molto dubbie. Il filosofo George Berkeley (1685–1753) rese esplicito quel fermento critico sui fondamenti dell'analisi, giungendo a definire gli infinitesimi "spettri di quantità morte". Per capire come si usava ragionare all'epoca, citiamo Leonhard Euler (1707–1783), che insieme ad Archimede e Gauss è tradizionalmente considerato il più grande matematico della storia.[3]

> i differenziali ... essendo privi di quantità, sono anche detti infinitesimi e, per la loro natura sono da interpretarsi come del tutto nulli o uguali a zero. Così se alla quantità x si attribuisce un incremento ω, di modo che diventi $x+\omega$, il suo quadrato xx diventerà $xx + 2x\omega + \omega\omega$, e dunque subirà l'incremento $2x\omega + \omega\omega$, perciò l'incremento della x, che è ω, starà all'incremento del quadrato, che è $2x\omega + \omega\omega$ come 1 sta a $2x + \omega$; il quale rapporto diventa di 1 a $2x$ soltanto nel momento in cui ω svanisce. Sia dunque $\omega = 0$ e il rapporto di questi incrementi evanescenti, che è la sola cosa che si considera nel calcolo differenziale, è quello di 1 a $2x$. (L. Euler, *Institutiones calculis differentialis*, 1755)



In breve, se f è la funzione "quadrato", x è un punto fissato, e ω denota un incremento infinitesimo, il ragionamento di sopra può essere riassunto così:

$$f'(x) = \frac{(x+\omega)^2 - x^2}{\omega} = \frac{x^2 + 2x\omega + \omega^2 - x^2}{\omega} = \frac{\omega(2x+\omega)}{\omega} = 2x + \omega = 2x.$$

Berkeley puntò polemicamente il dito sulla contraddittorietà di un tale tipo di ragionamento dove in un primo momento si suppone $\omega \neq 0$ (altrimenti il rapporto incrementale non è definito), e in un secondo momento si "trascura" ω uguagliandolo a zero. Dunque l'incremento infinitesimo ω è considerato allo stesso tempo diverso da zero ed uguale a zero. E si merita perciò l'appellativo di "spettro di quantità morte"!

Fu solo nella seconda metà dell'Ottocento che Karl Weiestrass introdusse la cosiddetta formalizzazione ε-δ, quella attualmente seguita. Finalmente il calcolo aveva solide basi, ma il prezzo pagato fu quello di bandire completamente i numeri infinitesimi ed infiniti dall'analisi. A partire dall'inizio del Novecento, inesorabilmente si diffuse tra i matematici la comune opinione secondo la quale, per usare le parole di Bertrand Russell, "gli infinitesimi ... devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori".

Nella formalizzazione di Weierstrass, l'indispensabile concetto intuitivo di numero "piccolo" viene introdotto in modo indiretto, mediante la nozione di funzione infinitesima. L'intero sviluppo della teoria del calcolo differenziale ed integrale si

[2]Sul valore del pensiero scientifico greco del periodo ellenistico, consigliamo vivamente la lettura del libro di Lucio Russo [8].

[3]Per correttezza storica, è bene precisare che la citazione qui riportata è posteriore di alcuni anni alla critica di Berkeley. Tuttavia non ne è in alcun modo influenzata, e riproduce in modo esemplare un modo di argomentare molto diffuso in tutto il XVIII secolo.

Da I. LAVATORE, IL PROGRAMMA DI HILBERT E I SUOI RECENTI SVILUPPI.

Abbiamo già osservato che il programma di Hilbert nasce prima della scoperta della antinomia di Russell. Di fronte alla scoperta delle antinomie logiche ed insiemistiche (che peraltro non scalfiscono la fiducia di Hilbert nella non contraddittorietà della matematica, in quanto egli le attribuisce al tentativo di voler fondare la matematica sulla logica e alla non precisa formulazione della logica usata in matematica[21]), nel 1904 l'única proprietà indagata da Hilbert, per la fondazione della matematica, è quella della non contraddittorietà.

Hilbert esige che le dimostrazioni di non contraddittorietà, per essere davvero "fondanti", siano eseguite o con mezzi concreti e semplici (fra i quali non è incluso il concetto di numero naturale, nemmeno nella sua accezione intuitiva), oppure con mezzi appartenenti a teorie delle quali sia stata già dimostrata, in conformità con tale programma, la non contraddittorietà[22].

L'esigenza di rigore aveva portato Hilbert a considerare le dimostrazioni come catene finite di inferenze formali[23]. In parole semplici, lo scopo di Hilbert era di dimostrare affermazioni sull'infinito con mezzi e procedimenti finiti, gli unici riconosciuti veramente validi dalla mente umana, per la loro corrispondenza con i fenomeni reali e fisici: in questo modo potevano essere accettati e ritenuti validi anche i concetti infiniti.

Hilbert, inoltre, afferma che la dimostrazione di non contraddittorietà va eseguita in una nuova disciplina matematica, la quale abbia per propri oggetti le "dimostrazioni matematiche" formalizzate, e alla quale affida anche la trattazione di altri importanti problemi filosofici e gnoseologici riguardanti la matematica[29]; si tratta della disciplina che, negli anni successivi, verrà chiamata "metamatematica" o "teoria della dimostrazione".

Inizialmente, l'intenzione di Hilbert era quella di condurre le indagini metateoriche con mezzi estremamente semplici e concreti. Ma divenne poi chiaro che, anche solo per costruire i SISTEMI FORMALI ~~formalismi~~[30] era necessario accettare in partenza anche altri mezzi, che sostanzialmente sono quelli che permettono di ottenere il concetto intuitivo di numero naturale,

- 1 -

[...] Dagli anni Venti in poi, Hilbert distingue, all'interno della matematica, una parte che è dotata di contenuti concettuali intuitivi e di verità evidenti, che usa l'infinito solo nella sua forma potenziale, che procede con mezzi concreti e finiti, e che è accettabile anche da parte dei critici della matematica classica: chiama questa parte "matematica finitistica" (finite Mathematik), e la restante parte "matematica infinitistica" (transfinite Mathematik).

Nella matematica finitistica è accettato anche il concetto intuitivo di numero naturale e in essa è possibile svolgere parte dell'aritmetica. Hilbert ora distingue tra il "principio di induzione", che ha bisogno di fondazione, e certi ragionamenti induttivi contenutistici che si basano sulla costruzione induttiva delle cifre, e che appartengono alla matematica finitistica[35].

Il pensiero finitistico, che non si basa quindi solo sull'esperienza, è presentato come un "prerequisito" per ogni conoscenza scientifica, poiché Hilbert ritiene che senza di esso nessuna costruzione scientifica possa essere fatta, nemmeno formalmente[36]; quindi il pensiero finitistico è, per Hilbert, il pensiero necessario per costruire i ~~formalismi~~. SISTEMI FORMALI. [...]

Dobbiamo ricordare che, all'epoca di Hibert, la maggior parte dei matematici erano interessati alla fondazione della matematica. Infatti c'erano intensi dibattiti imperniati sul problema della legittimità degli oggetti astratti. Weierstrass, per esempio, chiarì enormemente il ruolo dell'infinito nell'analisi. La teoria degli insiemi di Cantor, d'altra parte, prometteva alla matematica di raggiungere nuove vette di generalità, chiarezza e rigore. Ma Russell e Frege dimostrarono che basare la matematica su una teoria generale di proprietà porta ad una "imbarazzante contraddizione"[58]. Altri matematici, come Kronecker, Poincaré e Brouwer, misero in discussione la validità di tutti i ragionamenti infinitistici. Hilbert volle allora difendere il "paradiso di Cantor". Il fuoco delle polemiche dell'epoca era anche alimentato dai rivoluzionari sviluppi nella fisica matematica. Secondo S. Simpson: "...il contrasto con l'atmosfera cupa di oggi, di esaurimento intellettuale e di forte specializzazione, non potrebbe essere più stridente"[59].

Come uno dei principali matematici della sua epoca, Hilbert considerava suo personale dovere difendere la matematica contro gli

- 2 -

ATTACCHI DEGLI SCETTICI, SECONDO HILBERT, IL PUNTO
più vulnerabile nel corpo della matematica era l'*infinito*. Allo scopo di difendere le fondamenta della matematica era soprattutto necessario chiarire e giustificare l'uso matematico dell'infinito[60].

Dunque Hilbert dette al problema un significato sovramatematico. La matematica non è solo la più rigorosa e logica delle scienze ma è anche il più spettacolare esempio di quello che la ragione umana può fare da sola[61]. Se il matematico fallisce, questo non succede allo spirito umano. Ciò è ben spiegato nel seguente passo: "La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito è diventata necessaria non soltanto per gli interessi particolari delle scienze individuali, ma per l'onore dell'intelligenza umana stessa"[62].

Hilbert comincia con il porsi la seguente domanda: a cosa, se veramente qualcosa esiste, corrisponde l'uso matematico dell'infinito?

Secondo Simpson, l'analisi di Hilbert di questo punto sarebbe stata tratta dall'esame della distinzione di Aristotele tra infinito attuale e infinito potenziale[63].

Hilbert accetta il quadro del mondo che è presentato dalla fisica agli inizi del XX secolo. La teoria atomica dice che la materia non è infinitamente divisibile. La teoria dei quanti dice, ugualmente, che l'energia non è infinitamente divisibile. E la teoria della relatività dice che lo spazio e il tempo sono illimitati ma, probabilmente, non infiniti.

Hilbert conclude che l'infinito della matematica non corrisponde a qualcosa di esistente nel mondo fisico. Di conseguenza, il problema di giustificare l'uso matematico dell'infinito è ancora più urgente e difficile per Hilbert di quanto fosse stato per Aristotele.

- 3 -

Malgrado questa conclusione sconfortante, Hilbert coraggiosamente afferma che la matematica infinitistica può essere pienamente fondata. Questo può essere fatto in tre passi[64].

Il primo passo è isolare la parte di matematica senza problemi, "finitistica". Questa parte di matematica è indispensabile per tutti i ragionamenti scientifici e perciò non necessita di una particolare dimostrazione. Hilbert non formula una precisa definizione di finitismo, ma offre solo alcune indicazioni. La matematica finitistica deve fare a meno, *completamente*, delle totalità infinite.

Nonostante ciò, la matematica finitistica è adeguata per ragionamenti elementari di teoria dei numeri e per ragionamenti elementari sulla manipolazione di successioni finite di simboli.

Il secondo passo è ricostruire la matematica infinitistica come un grande, elaborato, sistema formale.

Le formule di questo grande sistema sono successioni di simboli che, secondo Hilbert, sono prive di significato in sé stesse, ma possono essere manipolate finitisticamente.

L'ultimo passo del programma di Hilbert è dare una dimostrazione, finitisticamente corretta, della non contraddittorietà del grande sistema definito nel passo precedente.

- 4 -

Alcuni commenti storici.

- Newton, Leibniz, Eulero usavano metodi non sempre rigorosi.

Verrebbe spontaneo supporre che l'analisi (continuita', calcolo differenziale, calcolo integrale, etc.) sia stata formulata fin dall'inizio in una maniera molto simile a quella con cui viene trattata al giorno d'oggi. Al contrario, i matematici citati sopra usavano metodi molto meno rigorosi di quelli attuali, e talvolta decisamente insoddisfacenti. In particolare, si consideravano quantita' "infinitesime" che, a seconda delle convenienze, venivano di volta in volta supposte diverse da zero, oppure esattamente uguali a zero. Nonostante il filosofo Berkeley avessse fatto polemicamente notare che assumere che una quantita' fosse contemporaneamente uguale a zero e diversa da zero portava ad un'immediata e plateale contraddizione, l'attivita' matematica era proseguita per molti anni in questo modo poco rigoroso.

Citiamo il sottotitolo dell'Analista di Berkeley:

<< L'Analista, ovvero Discorso rivolto ad un matematico infedele. Dove si esamina se l'oggetto, i principi e le inferenze del moderno analista siano concepiti piu' distintamente e dedotti in maniera piu' evidente dei misteri della religione e dei dogmi della fede. "Togli prima la trave dal tuo occhio; solo allora potrai vedere cosi' chiaramente da togliere la pagliuzza dall'occhio di tuo fratello" >>

E una frase di D'Alemebert:

<< una quantita' o e' qualcosa o e' niente: se e' qualcosa, non si e' ancora annullata; se e' niente, si e' letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio fra qualcosa e niente e' una pura chimera >>

- Weiestrass, e quella che viene chiamata "aritmetizzazione dell'analisi".

Una sistemazione rigorosa dell'analisi e' stata completata, col contributo anche di altri, da Weiestrass, nella maniera che tutti (noi matematici ;) conosciamo. In particolare, Weiestrass ha dato una definizione rigorosa di limite, senza fare uso dell' "infinito in atto". C'e' da notare che metodi di questo genere erano comunque gia' stati usati nel periodo ellenistico.

- Bolzano, Dedekind, Cauchy, Cantor etc. Uso della nozione di insieme.
Se la nozione di limite di Weiestrass fa uso solo di un "infinito potenziale", Weiestrass ha comunque fatto uso implicitamente della nozione di insieme, ad esempio, di sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali. Inoltre, mentre la nozione di limite non crea piu' nessun problema "fondazionale", e' difficile sostenere che non si usino procedimenti infiniti per dimostrare l'esistenza di certi limiti. In altre parole, bisogna presentare una costruzione o una definizione non controversa dell'insieme dei numeri reali. Le costruzioni di Dedekind e Cauchy (di cui si spera il discente sia venuto a conoscenza) fanno un uso effettivo e notevole, in una forma o nell'altra, della nozione di insieme.
I problemi originari sull'infinito, e poi sugli infinitesimi sono stati quindi semplicemente spostati sulla nozione di insieme.

- Kronecker, Poincare'... Controversie sull'uso degli insiemi.

I metodi di Cantor e l'uso della teoria degli insiemi non sono stati accettati immediatamente da tutti i matematici (anche se oggi il consenso della maggior parte dei matematici sembra autorizzare, entro certi limiti, l'uso degli insiemi). Il paradosso di Russell non ha fatto altro che acuire i dubbi ed esacerbare le polemiche.

Per esemplificare quanto detto sopra, citiamo alcune parti di un articolo di D. Hilbert, Sull'infinito, 1926.

<< Con le sue penetranti critiche Weierstrass ha fornito un solido fondamento all'analisi classica. Chiarendo molte nozioni, in particolare quelle di minimo, di funzione e di quoziente differenziale, ha eliminato i difetti ancora presenti nel calcolo infinitesimale, lo ha liberato da ogni confusione relativa all'infinitesimale, risolvendo cosi' completamente le difficolta' derivanti da tale concetto. Se oggi in analisi c'e' accordo completo e sicurezza nell'impiego dei metodi deduttivi basati sui concetti di numero irrazionale e di limite, e se si e' unanimi sui risultati raggiunti anche nelle questioni piu' complesse della teoria delle equazioni differenziali ed integrali, nonostante l'uso delle piu' ingegnose e varie combinazioni di composizioni, giustapposizioni e incastri di limiti, tutto cio' e' merito soprattutto dell'opera scientifica di Weierstrass.

Tuttavia, malgrado la fondazione del calcolo infinitesimale fornita da Weierstrass, proseguono le dispute sui fondamenti dell'analisi.

Tali dispute non sono cessate perche' il significato dell' "infinito", nel senso in cui tale concetto e' usato in matematica, non e' mai stato chiarito completamente. E' vero che l'analisi di Weierstrass ha eliminato l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, riducendo ogni affermazione su di essi all'affermazione su relazioni tra grandezze finite. Tuttavia, l'infinito compare ancora nella[?] serie numerica infinita che definisce i numeri reali e nel concetto di sistema dei numeri reali, concepito come una totalita' realizzata simultaneamente ed esistente "in atto". Nella sua fondazione dell'analisi, Weierstrass accetto' senza riserve ed adopero' ripetutamente forme di deduzione logica in cui entra il concetto di infinito, come quando si considerano tutti i numeri reali che hanno una certa proprieta' o si afferma che esistono numeri reali che hanno una certa proprieta'.

L'infinito percio' ricompare nella teoria di Weierstrass per un'altra via, sfuggendo cosi' all'esigenza di precisione imposta dalla sua critica. Occorre quindi risolvere una volta per tutte il problema dell'infinito, nel senso ora indicato. Proprio come nei procedimenti di passaggio al limite del calcolo infinitesimale l'infinito, nel senso del1'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo, si e' rivelato semplicemente un modo di dire, nello stesso modo dobbiamo renderci conto che l'infinito, nel senso di una totalita' infinita, dove e' ancora usato nei metodi deduttivi, e' un'illusione.

Proprio come le operazioni sull'infinitamente piccolo sono state sostituite da operazioni sul finito che danno luogo esattamente agli stessi risultati e alle stesse eleganti relazioni formali, cosi' in generale i metodi deduttivi basati sull'infinito devono essere sostituiti con procedimenti finiti che diano gli stessi risultati, che cioe' rendano possibili le stesse catene di dimostrazioni e gli stessi metodi per ottenere formule e teoremi.

Questo e' lo scopo della mia teoria. Essa si propone di dare definitivamente sicurezza al metodo matematico, compito che non fu assolto neppure durante il periodo critico del calcolo infinitesimale. Essa percio' dovrebbe condurre a compimento cio' che Weierstrass sperava di fare con la sua fondazione dell'analisi e verso cui ha compiuto un passo necessario ed importante.

[...]

Cantor ha sviluppato con notevole successo, in base a questi concetti, la teoria dei numeri transfiniti, e ha inventato tutto un calcolo per essi. Cosi', grazie alla collaborazione tra i giganti Frege, Dedekind e Cantor, l'infinito fu posto sul trono e inizio' un'era di grandi trionfi. Osando il volo, esso ha raggiunto una vertiginosa vetta di successi.

Non mancarono, tuttavia, le reazioni. Esse assunsero, in realta', forme molto drammatiche, e furono di tipo analogo a quelle suscitate dagli sviluppi del calcolo infinitesimale. Nella gioia della scoperta di nuovi importanti risultati, i matematici si erano poco preoccupati della validita' dei loro metodi deduttivi. Infatti a poco a poco cominciarono a spuntare fuori delle contraddizioni, causate semplicemente dall'uso di definizioni e di metodi deduttivi ormai abituali. Tali contraddizioni, i cosiddetti paradossi della teoria degli insiemi, sebbene inizialmente sporadiche, divennero gradualmente sempre piu' acute e serie. In particolare una contraddizione scoperta da Zermelo e Russell ebbe un effetto addirittura catastrofico quando divenne nota nel mondo matematico. Di fronte a questi paradossi Dedekind e Frege abbandonarono completamente i loro punti di vista e si ritirarono dalla lotta: Dedekind esito' a lungo prima di permettere la pubblicazione di una nuova edizione del suo trattato "Was sind und was sollen die Zahlen", che a suo tempo aveva fatto epoca, e in un epilogo anche Frege dovette riconoscere che l'indirizzo del suo libro "Grundgesetze der Arithmetik" era sbagliato. La stessa teoria di Cantor fu attaccata da tutti i lati.

La reazione fu cosi' violenta che vennero messi in questione anche i concetti piu' comuni e fecondi e i tipi di ragionamento piu' semplici e importanti della matematica e si voleva vietare il loro impiego. Naturalmente l'antico ordine ebbe dei difensori, ma le tattiche di questi ultimi erano troppo timide ed essi non fecero mai un fronte unico nei punti vitali. Furono avanzati troppi rimedi differenti per i paradossi, ed i metodi proposti per chiarirli erano troppo disparati. >>

Una versione generale del Lemma di Lindenbaum.

Sia S un sistema formale (assumiamo sempre che l'insieme dei simboli e delle formule sia finito o numerabile). Una teoria T di S è un insieme di formule.

Proposizione 1. *(Lemma di Lindenbaum (versione generale)). Se ψ è una formula fissata di S e T è una teoria tale che $T \nvdash \psi$, allora esiste una teoria $T^* \supseteq T$ tale che $T^* \nvdash \psi$ e T^* è massimale con questa proprietà.*

Dimostrazione. Elenchiamo tutte le formule di S come $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ Costruiamo una successione T_i di teorie per induzione al seguente modo. Poniamo $T_0 = T$. Supponiamo di aver costruito T_i e poniamo $T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i\}$ se $T_i \cup \{\varphi_i\} \nvdash \psi$, altrimenti poniamo $T_{i+1} = T_i$. Poiché per ipotesi $T_0 = T \nvdash \psi$, abbiamo che nessuna T_i dimostra ψ.

Sia $T^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$. Abbiamo che $T^* \nvdash \psi$, poichè se esistesse una dimostrazione di ψ a partire da T^*, questa dimostrazione utilizzerebbe un numero finito di formule da T^*, quindi la dimostrazione si potrebbe effettuare già in T_i, per qualche i, ma abbiamo visto che questo è falso.

Resta da dimostrare che T^* è massimale tale che $T^* \nvdash \psi$. Supponiamo per assurdo che esista T^{**} che contiene propriamente T^* e tale che $T^{**} \nvdash \psi$. Allora ci sarebbe una formula φ che sta in T^{**} ma non in T^*. Siccome la successione $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ enumera tutte le formule di S, esiste un j tale che $\varphi = \varphi_j$. Per costruzione, abbiamo che $T_i \subseteq T^* \subseteq T^{**}$, per ogni i. Siccome $\varphi_j \in T^{**}$, in particolare, $T_j \cup \{\varphi_j\} \subseteq T^{**}$ e siccome $T^{**} \nvdash \psi$, a maggior ragione $T_j \cup \{\varphi_j\} \nvdash \psi$. Ma allora la costruzione di T_{j+1} ci dà $T_{j+1} = T_j \cup \{\varphi_j\}$. Siccome $T_{j+1} \subseteq T^*$, allora $\varphi_j \in T^*$. Ma φ_j è φ, e avevamo assunto che $\varphi \notin T^*$, assurdo. $\square$

Anche se S è dato in maniera effettiva, la dimostrazione precedente non è effettiva, perchè la relazione di "dimostrabile" non sempre è effettiva.

Diciamo che una teoria T è *non contraddittoria* se esiste almeno una formula φ di S tale che $T \nvdash \varphi$. Se invece T dimostra tutte le formule di S, allora T si dice *contraddittoria.* Sembrerebbe che le teorie contraddittorie abbiano ben poco interesse, anche se non tutti la pensano così (chi fosse interessato cerchi su qualche enciclopedia "logiche paraconsistenti").

Ci sono casi patologici in cui la Proposizione 1 non si generalizza a: *ogni teoria non contraddittoria si può estendere ad una teoria non contraddittoria massimale.* Ad esempio supponiamo che le formule di

S siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ e che $\varphi_{i+1} \vdash \varphi_i$ per ogni i. Si possono prendere le condizioni precedenti come la definizione di un sistema formale "scheletrico" in cui le regole $\vdash$ sopra sono le regole di inferenza. Sotto le condizioni precedenti, ogni teoria che contiene infinite formule distinte è evidentemente contradditoria, secondo la definizione precedente. D'altro canto, ogni teoria finita si può sempre estendere ad una teoria non contradditoria aggiungendo la prima formula con indice maggiore di tutti gli indici delle formule di T. Quindi in questo caso non esistono teorie massimali non contradditorie.

L'esistenza di teorie massimali non contradditorie segue comunque da ipotesi molto deboli. D'ora in poi supponiamo che S abbia una formula "falsa" f tale che $f \vdash \varphi$, per ogni formula φ. Sotto queste ipotesi, una teoria T è non contradditoria se e solo se $T \nvdash f$. Quindi dalla Proposizione 1 seque subito,

Corollario 2. *Se S ha una proposizione falsa, allora ogni teoria T non contradditoria può essere estesa ad una teoria T^* non contradditoria massimale (si dice che T^* è* completa*.)*

Inoltre T^* ha la seguente proprietà. Supponiamo che θ e ξ sia una coppia di formule tale che, per ogni teoria R, se $R \cup \{\theta\} \vdash f$, allora $R \vdash \xi$ [ad esempio, nel calcolo delle proposizioni si può considerare la coppia θ e $\neg\theta$]. Per ogni coppia θ e ξ di formule come sopra, $T^* \vdash \theta$ oppure $T^* \vdash \xi$.

Dimostrazione. La prima frase è immediata dalla Proposizione 1, prendendo f come ψ.

Per dimostrare la seconda affermazione, se $T^* \vdash \theta$ siamo a posto. Altrimenti, T^* non contiene θ, e allora $T^* \cup \{\theta\}$ è contradditoria, poiché T^* è massimale non contradditoria. Cioè, $T^* \cup \{\theta\} \vdash f$. Allora, per ipotesi, $T^* \vdash \xi$. $\square$

Dimostrazione dell'osservazione VIII a p. 68 del libro di Mendelson. (Definizioni e notazioni come nel Mendelson, Sezione 2.2.
È data un'interpretazione fissata con dominio D.)

(a) Sia t un termine e siano s e r successioni che assumono gli stessi valori in tutti i posti corrispondenti alle variabili che compaiono in t (non si assume nulla per i valori che assumono s e r negli altri posti). Allora $s^*(t) = r^*(t)$.

(Intuitivamente, $s^*(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ va pensato come $s^*(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$, se $s = (b_1, b_2, \dots)$, quindi intuitivamente il lemma sarebbe ovvio.)

(b) Sia $\mathcal{A}$ una formula e siano s e r successioni che assumono gli stessi valori in tutti i posti corrispondenti alle variabili che compaiono *libere* in $\mathcal{A}$ (s e r possono assumere valori diversi nei posti corrispondenti alle variabili vincolate!)

Allora $\mathcal{A}$ è soddisfatta da s se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfatta da r (sempre relativamente all'interpretazione fissata).

(c) In particolare, sempre fissata un'interpretazione, se $\mathcal{A}$ è una formula senza variabili libere (una formula chiusa), allora $\mathcal{A}$ è soddisfatta da una successione s se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfatta da un'altra successione qualunque r. In altre parole, si può definire (a posteriori!) la soddisfacibilità delle formule chiuse senza fare riferimento a successioni.

Dimostrazione. (a) Dimostrazione per induzione sulla complessità di t. Siano $s = (b_1, b_2, \dots)$ e $r = (c_1, c_2, \dots)$.

(a1) Se t è la variabile x_i, allora, per la definizione induttiva di s^* (base induttiva) abbiamo $s^*(t) = b_i$, analogamente $r^*(t) = c_i$. Ma x_i compare in t, quindi per ipotesi s e r coincidono nel posto i, quindi $b_i = c_i$, cioè $s^*(t) = r^*(t)$.

(a2) Se t è una costante, $s^*(t)$ è l'interpretazione di quella costante. In questo caso la definizione non dipende da s e non si usa l'ipotesi (ricordiamo che l'interpretazione è fissata una volta per tutte in questo lemma).

(a3) Supponiamo che f sia una lettera funzionale (dipendente da n argomenti), $t_1, \dots t_n$ siano termini per cui (a) è già stato dimostrato. Dobbiamo dimostrare (a) per il termine $u = f(t_1, \dots, t_n)$.

Supponiamo che s ed r coincidano in tutti i posti corrispondenti alle variabili che compaiono in u, cioè in tutti posti corrispondenti a tutte le variabili che compaiono in $t_1, \dots t_n$. Per l'ipotesi induttiva, $s^*(t_1) = r^*(t_1)$, ..., $s^*(t_n) = r^*(t_n)$. Quindi

$$s^*(u) = s^*(f(t_1, \dots, t_n)) = f^D(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n)),$$

dove f^D è l'interpretazione di f in D e abbiamo usato la definizione induttiva di s^*. Allo stesso modo,

$$r^*(u) = r^*(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^D(r^*(t_1), \ldots, r^*(t_n)).$$

Per l'ipotesi induttiva (sulla parte (a) che stiamo dimostrando) $s^*(t_1) = r^*(t_1)$, ..., $s^*(t_n) = r^*(t_n)$, quindi dalle due equazioni precedenti segue $s^*(u) = r^*(u)$. Abbiamo dimostrato il passo induttivo in (a).

(b) Dimostrazione per induzione sulla complessità di $\mathcal{A}$.

(b1) Se $\mathcal{A}$ è atomica, allora $\mathcal{A}$ ha la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, per qualche simbolo di relazione R e certi termini $t_1, \ldots, t_n$.

Per definizione di soddisfacibilità, $\mathcal{A}$ è soddisfatta da s se e solo se vale $R^D(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$, cioè $(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n)) \in R^D$. Allo stesso modo, $\mathcal{A}$ è soddisfatta da r se e solo se vale $R^D(r^*(t_1), \ldots, r^*(t_n))$.

Siccome $\mathcal{A}$ non contiene quantificatori, tutte le variabili in $t_1. \ldots, t_n$ sono libere in $\mathcal{A}$. Per la parte (a), $s^*(t_1) = r^*(t_1)$, ..., $s^*(t_n) = r^*(t_n)$, quindi $R^D(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$ se e solo se $R^D(r^*(t_1), \ldots, r^*(t_n))$.

Quindi $\mathcal{A}$ è soddisfatta da s se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfatta da r

(b2) Se $\mathcal{A}$ è $\neg\mathcal{B}$ oppure $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, il risultato è banale per l'ipotesi induttiva.

(b3) Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia $\forall x_i \mathcal{B}$ e che (b) valga per $\mathcal{B}$. Le variabili libere di $\mathcal{A}$ sono le variabili libere di $\mathcal{B}$ eccetto eventualmente x_i.

Per definizione di soddisfacibilità, s soddisfa a $\mathcal{A}$ se e solo se s' soddisfa a $\mathcal{B}$, per ogni successione s' diversa da s solo (=al più) nel posto i.

Supponiamo che s soddisfi ad $\mathcal{A}$ e r sia un'altra successione che coincide con s in tutti i posti corrispondenti alle variabili libere di $\mathcal{A}$. Vogliamo dimostrare che anche r soddisfa ad $\mathcal{A}$, cioè vogliamo dimostrare che:

(*) Per ogni successione r' diversa da r solo nel posto i, allora r' soddisfa a $\mathcal{B}$,

Sia dunque r' una successione diversa da r solo nel posto i. Sia s' la successione che coincide con s in tutti i posti diversi da i e che assume lo stesso valore di r' nel posto i. Per ipotesi s ed r coincidono in tutti i posti corrispondenti alle variabili libere di $\mathcal{A}$, quindi anche s' ed r' coincidono in tutti i posti corrispondenti alle variabili libere di $\mathcal{A}$, siccome x_i non è un variabile libera in $\mathcal{A}$. Inoltre, per costruzione s' ed r' coincidono al posto i. Quindi s' ed r' coincidono in tutti i posti corrispondenti alle variabili libere di $\mathcal{B}$.

Per l'ipotesi induttiva, s' soddisfa a $\mathcal{B}$ se e solo se r' soddisfa a $\mathcal{B}$, Siccome abbiamo supposto che s soddisfa ad $\mathcal{A}$, allora s' soddisfa a $\mathcal{B}$, quindi anche r' soddisfa a $\mathcal{B}$. Questo ragionamento si può applicare ad ogni successione r' diversa da r solo nel posto i, quindi abbiamo dimostrato (*). Per la definizione di soddisfacibilità, questo significa che r soddisfa ad $\mathcal{A}$.

Abbiamo dimostrato che se s soddisfa ad $\mathcal{A}$ e r è un'altra successione che coincide con s in tutti i posti corrispondenti alle variabili libere di $\mathcal{A}$, allora r soddisfa a $\mathcal{A}$. Il viceversa si dimostra per simmetria, quindi il passo induttivo di (b) è verificato.

(c) segue banalmente da (a). $\square$

Quindi non è vero né $T \vdash \varphi$ né $T \vdash \neg\varphi$. Dimostriamo e$\Rightarrow$a. Assumiamo e e dimostriamo che $\mathrm{ccl}(T)$ è coerente massimale. La coerenza è ovvia. Sia φ un enunciato arbitrario e supponiamo che $\varphi \notin \mathrm{ccl}(T)$. Allora esiste un modello di T tale che $M \vDash \neg\varphi$. Quindi per e, $M \vdash \neg\varphi$ in tutti i modelli di T. Allora $\neg\varphi \in \mathrm{ccl}(T)$. □

3.25 Esercizio Sono le seguenti affermazioni equivalenti ad affermare che T è coerente massimale, rispettivamente, completa?

a. per ogni enunciato φ, o $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$ ma non entrambe;

b. per ogni enunciato φ, o $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$ ma non entrambe.

(Dalle definizioni di completezza abbiamo omesso il requisito di consistenza e aggiunto la clausola 'non entrambe'.) Si risponda alla domanda anche nel caso in cui T sia chiusa per conseguenza logica. Suggerimento: può tornare utile considerare il seguente esempio. La teoria T contiene tutte gli enunciati in cui il simbolo '$\neg$' occorre un numero pari di volte. Questa teoria è contraddittoria perché contiene $\perp$. Soddisfa a? Soddisfa b? È
no chiusa per conseguenza logica? □

3.5 Un esempio: l'analisi nonstandard

Questo paragrafo è dedicato ad un esempio che analizzeremo un po' in dettaglio perché è utile per impratichirsi con la relazione di sottostruttura elementare. Questo esempio è comunque culturalmente interessante. Infatti dà rigore matematico al formalismo usato ai tempi di Leibniz e Newton per fare analisi matematica. Allora l'analisi matematica era fondata sui concetti di infinito e di infinitesimo, nozioni che al tempo erano mal definite se non contraddittore. Solo dalla metà dell'ottocento i matematici della generazione di Weistraß rimediarono a questi vizi di forma fondando l'analisi matematica sul concetto di limite. L'analisi non standard invece recupera la dignità matematica degli infiniti ed infinitesimi usando il concetto di estensione elementare. Fu scoperta verso la metà del novecento da Abraham Robinson.

(per compattezza esiste un modello non standard:
T U {c ≠ c_r | r in R}
o anche: T U {c>c n|n in N}

Fissiamo un po' di notazione valida per tutto il paragrafo. Il linguaggio che useremo contiene

1. un simbolo di relazione n-aria per ogni $X \subseteq \mathbb{R}^n$;

2. un simbolo di funzione n-aria per ogni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; → *f:(*R)^n -> *R

3 un simbolo di costante per ogni elemento di R

Chiameremo $\mathbb{R}$, con la naturale interpretazione dei simboli, il **modello standard dell'analisi reale**. Quindi lo stesso simbolo denota elementi del linguaggio e l'interpretazione in $\mathbb{R}$. Non si tratta di un abuso di linguaggio, sono proprio la stessa cosa !

modello per la teoria T che contiene tutti e soli gli enunciati veri nel modello standard

Assumiamo che esista una estensione elementare propria di $\mathbb{R}$ e fissiamone una che indicheremo con ${}^*\mathbb{R}$. ~~L'esistenza di questa estensione verrà dimostrata più avanti.~~

L'interpretazione dei simboli f ed X in ${}^*\mathbb{R}$ verrà indicata con ${}^*\!f$ e ${}^*\!X$. Gli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ verranno chiamati **iperreali**, gli elementi di $\mathbb{R}$ li chiameremo **(iper)reali standard**, quelli in ${}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ li chiameremo **(iper)reali nonstandard**.

È immediato verificare che ${}^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato. Infatti, le operazioni di somma e prodotto appartengono al linguaggio, come pure la relazione d'ordine. La proprietà di

tutte le proprieta' al primo ordine valide in R
per certe relazioni, funzioni etc. valgono in *R
funzioni "solite" +, . , relazioni < ...

0 epsil reali standard

reali non standard

essere un campo ordinato è traducibile in un insieme di enunciati che, essendo veri in $\mathbb{R}$, saranno veri anche in $^*\mathbb{R}$.

Un iperreale c si dice **infinitesimo** se $|c| < \varepsilon$ per ogni ε standard positivo. Un iperreale c si dice **infinito** se $k < |c|$ per ogni k standard, altrimenti si dice **finito**. Quindi se c è infinito c^{-1} è infinitesimale. Ovviamente, tutti i reali standard sono finiti e 0 è l'unico reale standard infinitesimo. se 0<n<c per ogni n≠0 allora 1/n>1/c>0

3.26 Lemma *Esistono iperreali nonstandard infiniti ed infinitesimi non nulli.*

Dimostrazione Sia $c \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ e supponiamo che c non sia infinito, altrimenti c e c^{-1} dimostrano il lemma. Quindi l'insieme $\{a \in \mathbb{R} : c < a\}$ è un insieme non vuoto e limitato di reali. Sia $b \in \mathbb{R}$ l'estremo inferiore di questo insieme. Mostriamo che $b - c$ è infinitesimo non nullo. Non è nullo perchè $c \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Inoltre, se per assurdo che $\varepsilon < |b - c|$ per qualche ε standard positivo, allora $c < b - \varepsilon$, oppure $b + \varepsilon < c$, (a seconda se $c < b$ o $b < c$). Entrambe queste possibilità contraddicono le proprietà dell'estremo inferiore. □

inferiormente

L'esistenza di iperreali nonstandard infiniti prova che $^*\mathbb{R}$ non è un campo archimedeo: gli interi standard non sono cofinali in $^*\mathbb{R}$. Si osservi che però, per elementarità, gli interi nonstandard $^*\mathbb{Z}$ sono cofinali in $^*\mathbb{R}$: nella prospettiva di chi vive in $^*\mathbb{R}$, si tratta di un normalissimo campo archimedeo.

non è una proprietà esprimibile al primo ordine

La dimostrazione del seguente lemma è lasciata al lettore.

3.27 Lemma *Gli infinitesimi sono chiusi per somma prodotto e sono anche chiusi rispetto alla moltiplicazione per reali standard.*

La completezza di Dedekind è un'altra proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$ che non vale in $^*\mathbb{R}$. Questa dice che ogni sottoinsieme limitato superiormente ha un estremo superiore. In $^*\mathbb{R}$ non vale: infatti l'insieme degli infinitesimi è ovviamente limitato ma, per il lemma 3.27, non ha estremo superiore. Quindi la completezza di Dedekind *non* è una proprietà del prim'ordine. Comunque in casi particolari è preservata nel passaggio dai reali standard agli iperreali. Come succede spesso, proprietà che nel modello standard valgono per tutti gli insiemi valgono in $^*\mathbb{R}$ solo per gli insiemi definibili.

no

3.28 Lemma *Ogni sottoinsieme di $^*\mathbb{R}$ di arietà 1, definibile (anche con parametri), e limitato superiormente (in $^*\mathbb{R}$) ha un estremo superiore.*

Si noti che il lemma si riferisce a insiemi i definibili con parametri in $^*\mathbb{R}$, altrimenti la dimostrazione sarebbe immediata.

Dimostrazione Sia x una singola variabile, a una tupla di parametri in $^*\mathbb{R}$ e sia $\varphi(z,x)$ una formula pura. Dobbiamo mostrare che se $\varphi(a, {}^*\mathbb{R})$ è limitato allora ha un estremo superiore. La seguente formula $\psi(z,y)$ dice che y è un maggiorante dell'insieme definito da $\varphi(z,x)$ con z una tupla di parametri:

$$\psi(z,y) \;=\; \forall x\,[\varphi(z,x) \to x \le y].$$

La seguente formula $\xi(z,w)$ dice che w è l'estremo superiore (il minimo dei maggioranti) dell'insieme definito da $\varphi(z,x)$.

$$\xi(z,w) \;=\; \psi(z,y) \wedge \forall y\,[\psi(z,y) \to w \le y].$$

Quindi dobbiamo mostrare che in $^*\mathbb{R}$ vale $\exists y\,\psi(z,y) \to \exists w\,\xi(z,w)$. Questa è una formula del prim'ordine che vale in $\mathbb{R}$ è quindi vale anche in ogni sua estensione elementare. □

no Definiamo su ${}^*\mathbb{R}$ una relazione di equivalenza: scriveremo $a \approx b$ se $a - b$ è infinitesimo. Che sia effettivamente una relazione di equivalenza, segue facilmente dal lemma 3.27. La classe di equivalenza di c si chiama **monade** di c, in onore di Leibniz.

3.29 Lemma *Se c è un iperreale finito, nella monade di c esiste un'unico reale.*

Dimostrazione Per l'esistenza è sufficiente scorrere la dimostrazione del lemma 3.26 e osservare che il reale standard b è tale che $b \approx c$. Per l'unicità osserviamo che se $b_1 \approx b_2$ sono entrambi standard, allora $b_1 - b_2$ è un infinitesimo standard, quindi 0. □

Gli iperreali che non sono infiniti si dicono **finiti**. Se c è finito, quell'unico reale standard nella monade di c si chiama **parte standard** di c e si denota con $\mathbf{st}(c)$.

Si noti che nel seguente lemma le espressioni alla sinistra si formalizzano direttamente in enunciati del prim'ordine quindi valgono in $\mathbb{R}$ se e solo se valgono in ${}^*\mathbb{R}$.

3.30 Proposizione *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per ogni $a, l \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti equivalenze.*

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *è infinito positivo per ogni $c > 0$ infinito.*

no b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f x = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *per ogni $c > 0$ infinito.*

c. $\lim\limits_{x \to a} f x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *è infinito positivo per ogni $c \approx a \neq c$.*

d. $\lim\limits_{x \to a} f x = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *per ogni per ogni $c \approx a \neq c$.*

Dimostrazione Dimostriamo d e lasciamo le altre per esercizio. Per dimostrare la direzione $\Rightarrow$ assumiamo la parte sinistra dell'equivalenza d e la riscriviamo come formula del prim'ordine:

(1.) $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \left[0 < |x - a| < \delta \;\to\; |f x - l| < \varepsilon \right].$$

La nostra ipotesi dice che formula (1) è vera in $\mathbb{R}$, o equivalentemente in ${}^*\mathbb{R}$. Abbiamo usato alcune abbreviazioni che supponiamo il lettore sappia tradurre in formule e per avvicinarci alla notazione usata in analisi useremo le lettere ε e δ come variabili. I simboli $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\delta}$ denoteranno parametri.

Verifichiamo ora che ${}^*f(c) \approx l$ vale per ogni $c \approx a \neq c$, ovvero che $|{}^*f c - l| < \dot{\varepsilon}$ per ogni $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Fissiamo $\dot{\varepsilon}$ standard positivo, sia $\dot{\delta}$ un reale standard ottenuto dalla verità di (1) in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

(2) $${}^*\mathbb{R} \vDash \forall x \left[0 < |x - a| < \dot{\delta} \;\to\; |f x - l| < \dot{\varepsilon} \right],$$

dove $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\delta}$ ora stanno per parametri. Se $a \approx c \neq a$, allora $0 < |c - a| < \dot{\delta}$ è sicuramente soddisfatta (perché $\dot{\delta}$ è standard). Quindi da 2 otteniamo $|{}^*f c - l| < \dot{\varepsilon}$.

Per dimostrare la direzione $\Leftarrow$ supponiamo (1) sia falsa. Ovvero, in $\mathbb{R}$ vale

2. $$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \left[0 < |x - a| < \delta \;\wedge\; \varepsilon \leq |f x - l| \right],$$

vogliamo dimostrare che ${}^*f(c) \not\approx l$ per qualche $c \neq a$ infinitamente vicino ad a. Fissiamo un $\dot{\varepsilon}$ che testimonia la verità di questa formula in $\mathbb{R}$, un reale standard dunque. Ora, per elementarità osserviamo che

$${}^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0\, \exists x \left[0 < |x - a| < \delta \;\wedge\; \dot{\varepsilon} \leq |f x - l| \right].$$

Quindi fissiamo un arbitraio $\dot\delta$ >0 infinitesimo. Otteniamo

$$^*\mathbb{R} \vDash \exists x \left[0 < |x - a| < \dot\delta \ \wedge \ \dot\varepsilon \leq |f x - l| \right].$$

Un qualsiasi c che testimonia la verità di questa formula in $^*\mathbb{R}$ è tale che $c \approx a \neq c$ e contemporaneamente $\varepsilon \leq |{}^*f c - l|$, ma $\dot\varepsilon$ è stato scelto standard, quindi $^*f c \not\approx l$. □

Il seguente corollario è immediato.

3.31 Corollario *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *f è continua*

b. *$^*f(a) \approx {}^*f(c)$ per ogni per ogni a standard e ogni iperreale $c \approx a$;*

c. *$^*f(b) \approx {}^*f(c)$ per ogni $b \approx c$ iperreali finiti.* □

≃ a" parte standard

È importante nel corollario qui sopra restringere c a iperreali *finiti* altrimenti otteniamo una proprietà più forte:

3.32 Proposizione *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. *f è uniformemente continua;*

b. *$^*f(a) \approx {}^*f(b)$ per ogni coppia di iperreali $a \approx b$.*

no

Dimostrazione Dimostriamo a ⇒ b. Ricordiamo che f è uniformemente continua se

$\ast$ $$\mathbb{R} \vDash \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \left[|x - y| < \delta \ \to \ |f x - f y| < \varepsilon \right].$$

Assumiamo a e fissiamo $a \approx b$. Vogliamo mostrare che $|{}^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot\varepsilon$ per ogni $\dot\varepsilon$ standard positivo. Fissato $\dot\varepsilon$ standard positivo, sia $\dot\delta$ un reale standard ottenuto dalla validità di $\ast$ in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

2. $$^*\mathbb{R} \vDash \forall x, y \left[|x - y| < \dot\delta \ \to \ |f x - f y| < \dot\varepsilon \right].$$

In particolare

$$^*\mathbb{R} \vDash \ |a - b| < \dot\delta \ \to \ |f a - f b| < \dot\varepsilon.$$

Poiché $a \approx b$ allora $|a - b| < \dot\delta$ per qualunque $\dot\delta$ standard. Quindi $|{}^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot\varepsilon$.

Per dimostrare b ⇒ a neghiamo a

3. $$\mathbb{R} \vDash \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y \left[|x - y| < \delta \ \wedge \ \varepsilon \leq |f x - f y| \right].$$

Vogliamo trovare $a \approx b$ tali che $\dot\varepsilon \leq |{}^*f(a) - {}^*f(b)|$ per un qualche $\dot\varepsilon$ standard positivo. Sia $\dot\varepsilon$ un reale standard che testimonia la verità di 3 in $\mathbb{R}$. Per elementarità otteniamo

$$^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0\, \exists x, y \left[|x - y| < \delta \ \wedge \ \dot\varepsilon \leq |f x - f y| \right].$$

Quindi possiamo fissare un arbitrario infinitesimo $\dot\delta > 0$ ed ottenere $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ tali che

$$^*\mathbb{R} \vDash |a - b| < \dot\delta \ \wedge \ \dot\varepsilon \leq |f a - f b|.$$

Poiché $\dot\delta$ è infinitesimo, $a \approx b$ come richiesto per negare b. □

Church, tesi di tesi elaborata dal logico statunitense A. Church; afferma che ogni funzione calcolabile è una funzione ricorsiva e, viceversa, ogni funzione ricorsiva è una funzione calcolabile. Ciò comporta che se per una funzione esiste una procedura algoritmica che permette di calcolarne il valore in modo deterministico e in un tempo finito (*funzione calcolabile*), allora è possibile costruire tale funzione secondo gli schemi di una funzione ricorsiva, cioè partendo dalle *funzioni base* e applicando gli schemi di *composizione*, *ricorsione* e *minimalizzazione*. La tesi di Church afferma, pertanto, che il modello di calcolo fornito dalle funzioni ricorsive traduce in modo rigoroso il concetto intuitivo di funzione calcolabile. Nessun formalismo di descrizione esaustiva dell'insieme delle funzioni calcolabili ha mai contraddetto la tesi di Church, che rimane tuttavia una tesi non dimostrabile; infatti esprimendo con un qualsiasi formalismo l'idea di → calcolabilità, si riesce a dimostrare soltanto l'equivalenza fra le funzioni ricorsive e le funzioni *calcolabili secondo quel formalismo*. La tesi di Church è comunque verificata da tutti i formalismi finora conosciuti. È stata per esempio dimostrata l'equivalenza fra l'insieme delle funzioni ricorsive, l'insieme delle funzioni calcolabili con una macchina di Turing e l'insieme delle funzioni rappresentabili nel λ-calcolo.

Da https://www.treccani.it/enciclopedia/tesi-di-church_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

Le pagine precedenti su Analisi non standard sono del Prof. D. Zambella

– AUTORIFERIMENTO –

NON ESISTE NESSUN ENUNCIATO CHE, IN QUALCHE MODO, ESPRIMA LA PROPRIA FALSITÀ. SUPPONIAMO CHE φ SIA UN ENUNCIATO CHE AFFERMI "IO SONO FALSO", CIOÈ:

$$\varphi : \text{"}\varphi \text{ È FALSO"}$$

ALLORA, SE φ È VERO, PROPRIO PER CIÒ CHE AFFERMA φ, φ È FALSO, CONTRADDIZIONE.
SE φ È FALSO, È FALSO CHE φ SIA FALSO, DUNQUE φ È VERO, ANCORA UNA CONTRADDIZIONE.

ESSENZIALMENTE, QUESTO È IL "PARADOSSO DEL MENTITORE": COLUI CHE AFFERMA "STO MENTENDO" SI CONTRADDICE. COMUNQUE, COME ABBIAMO NOTATO PIÙ VOLTE, IL LINGUAGGIO "NATURALE" È AMBIGUO, QUINDI È POSSIBILE FARE AFFERMAZIONI CONTRADDITTORIE COME "IO STO MENTENDO"; AL CONTRARIO, IN UN LINGUAGGIO FORMALE SI DANNO REGOLE BEN PRECISE PER LA COSTRUZIONE DELLE FORMULE E DEGLI ENUNCIATI. L'ARGOMENTAZIONE PRECEDENTE MOSTRA CHE (AMMESSO SOTTO CERTE IPOTESI) NON PUÒ ESISTERE NESSUNA FORMULA COME LA φ PRECEDENTE, CHE AFFERMI DI ESSERE FALSO.

SUPPONIAMO, INVECE, DI AVERE UNA FORMULA φ CHE AFFERMI DI NON ESSERE DIMOSTRABILE:

$$\varphi_1 : \text{"}\varphi_1 \text{ NON È DIMOSTRABILE"}$$

SE φ_1 È DIMOSTRABILE, ALLORA CONTRADDICE SE STESSA.
SE $\neg\varphi_1$ È DIMOSTRABILE ($\neg\varphi_1$ SIGNIFICA "φ_1 È DIMOSTRABILE") ALLORA φ_1 È DIMOSTRABILE, CIOÈ SIA φ_1 CHE $\neg\varphi_1$ SONO DIMOSTRABILI, CONTRADDIZIONE.
IL CASO DI φ_1 È BEN DIVERSO, PERÒ, DAL CASO DI φ ALL'INIZIO. NEL CASO DI φ SI OTTENEVA COMUNQUE UNA CONTRADDIZIONE; NEL CASO DI φ_1 SI OTTIENE CHE, SE SI VOGLIONO EVITARE

CONTRADDIZIONI, NÈ φ_1 NÈ $\neg\varphi_1$ SONO DIMOSTRABILI, MA QUESTA, IN SÈ, NON È UNA CONTRADDIZIONE!* QUINDI, A PRIORI, NON SI PUÒ SCARTARE LA POSSIBILITÀ DI COSTRUIRE UNA FORMULA CHE AFFERMI LA PROPRIA INDIMOSTRABILITÀ, E IN EFFETTI GÖDEL HA DIMOSTRATO CHE, IN QUALCHE MODO, QUESTO È POSSIBILE.

NATURALMENTE, NELLA DISCUSSIONE PRECEDENTE, "DIMOSTRABILE" VA INTESO COME "DIMOSTRABILE IN UNA FISSATA TEORIA T". IN REALTÀ, SE T NON È CONTRADDITTORIA, φ_1 EFFETTIVAMENTE NON È DIMOSTRABILE, QUINDI È INTUITIVAMENTE VERA. QUESTO SI PUÒ PENSARE COME UNA DIMOSTRAZIONE DI φ_1; L'IMPORTANTE È NOTARE (SMULLYAN) CHE QUESTA DIMOSTRAZIONE NON PUÒ ESSERE EFFETTUATA ALL'INTERNO DELLA TEORIA T! SI USANO ASSUNZIONI ULTERIORI!

NATURALMENTE, PER COME SONO STATE DEFINITE LE FORMULE NEL CALCOLO DEI PREDICATI, NON ESISTONO FORMULE CHE "PARLANO" DI ALTRE FORMULE, CHE FANNO AFFERMAZIONI RIGUARDANTI ALTRE FORMULE: LE FORMULE DEL CALCOLO DEI PREDICATI "PARLANO" DI COSTANTI, VARIABILI, RELAZIONI ETC. ETC.. SI POSSONO UGUALMENTE PERÒ CREARE SITUAZIONI DI "AUTORIFERIMENTO" SE AD OGNI FORMULA SI ASSOCIA UN NUMERO NATURALE. QUESTO PROCEDIMENTO PRENDE IL NOME DI GÖDELIZZAZIONE. SE LAVORIAMO IN UNA TEORIA IN CUI SI PUÒ PARLARE DI NUMERI NATURALI (AD ESEMPIO, L'ARITMETICA DI PEANO), ALLORA UNA FORMULA $\psi(x)$ CON UNA VARIABILE x PUÒ ESPRIMERE (ALMENO INTUITIVAMENTE) UNA PROPRIETÀ DI UN'ALTRA FORMULA φ SE AL POSTO DI x SI SOSTITUISCE IL GÖDELIANO DI φ.

* IL PUNTO CRUCIALE È CHE ASSUMIAMO IL "PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO": $\varphi \vee \neg\varphi$, INTUITIVAMENTE, OGNI AFFERMAZIONE O È VERA, O È FALSA. INVECE, NON POSSIAMO RICHIEDERE CHE, PER OGNI AFFERMAZIONE φ_1, O SIA DIMOSTRABILE φ_1, O SIA DIMOSTRABILE LA NEGAZIONE DI φ_1.

I teoremi di incompletezza di Godel (versione relativamente informale).

Primo Teorema (Teorema di Godel-Rosser). Sia T una teoria

(a) in cui si possono esprimere alcuni fatti dell'aritmetica elementare dei numeri naturali, e
(b) tale che esista una procedura effettiva (algoritmo) per determinare se un enunciato e' un assioma di T oppure no (= gli assiomi sono ricorsivi)

nel linguaggio di

Allora, se T e' non contradditoria, T e' incompleta, cioe' c'e' un enunciato P di T che non e' dimostrabile, e tale che nemmeno la negazione di P e' dimostrabile.

Il teorema vale per sistemi formali in generale, ma in tal caso la "procedura effettiva" deve riguardare anche la possibilita' di applicare o meno le regole di deduzione.

NB: si potrebbe pensare di ovviare all'incompletezza aggiungendo la P data dal teorema agli assiomi di T, quindi P diventerebbe dimostrabile. Si noti pero' che la nozione di dimostrabilita' di cui parla il teorema e' relativa alla teoria T (quindi dovremmo dire sempre "dimostrabile in T", al posto di "dimostrabile"). Il teorema e' valido anche per la teoria T' ottenuta aggiungendo P agli assiomi di T. Si ottiene quindi un enunciato P' che non e' dimostrabile in T', e tale che nemmeno la sua negazione e' dimostrabile in T'.
Quindi se T e' una teoria che soddisfa (a), T non puo' essere estesa ad una teoria che sia completa e che inoltre soddisfi anche (b), naturalmente, sempre se si richiede la non contraddittorieta'.

nel linguaggio di

Secondo Teorema. Sotto le ipotesi del Primo Teorema (ma le assunzioni aritmetiche in (a) sono un po' piu' forti), esiste una formula di T
- che puo' essere intuitivamente interpretata come l'asserzione della non contraddittorieta' di T, e che
- non e' dimostrabile in T.

Per dare un enunciato preciso del secondo teorema bisognerebbe indicare esplicitamente la formula in questione, poiche', a seconda della formalizzazione all'interno di T della nozione di "non contraddittorieta'", si ottengono formule differenti, e il teorema non si applica a tutte le formule di questo tipo.

C'e' inoltre da osservare che, da un certo punto di vista, l'enunciato indecidibile P fornito dal primo teorema di Godel si puo' interpretare come un enunciato che afferma la propria indimostrabilita' (sempre relativamente a T). (Deve essere chiaro che si tratta di un'interpretazione: un enunciato in un sistema formale non e' altro che una sequenza finita di simboli!) Questo "significato" intuitivo di P ne mostra immediatamente l'indecidibilita'. E, sempre intuitivamente, P allora e' vero, essendo effettivamente indimostrabile.

Siccome le dimostrazioni all'interno di un sistema formale (proprio per come sono state costruite, e per l'assunzione che gli assiomi siano effettivamente riconoscibili) sono eseguibili "meccanicamente", da "una macchina", e siccome, secondo un'interpretazione del paragrafo precedente, un matematico puo' "vedere" che l'enunciato indecidibile di Godel "e' vero", c'e' chi ha sostenuto che il teorema di Godel mostra una superiorita' degli esseri umani sulle macchine, nel senso che un essere umano potrebbe conoscere la verita' di un'affermazione indimostrabile, e questo va al di la' di cio' che potrebbe fare un automa, che si limiterebbe alle dimostrazioni. Il dibattito sull'argomento (che sembra essere stato originariamente introdotto addirittura da Turing, ma solo al fine di confutarlo) e' stato parecchio acceso, e non si e' raggiunto un parere unanime.

Va pero' almeno osservato che l'enunciato indecidibile di Godel P e' intuitivamente vero solo a patto che si assuma la non contraddittorieta' della teoria T. Infatti, in una teoria contraddittoria tutto e' dimostrabile, quindi P, se davvero lo si pensa come un'affermazione della propria indimostrabilita', sarebbe intuitivamente falso. Quindi il matematico che "vedrebbe" la verita' di T, in realta', usa una teoria piu' forte di T (o comunque diversa da T), poiche' usa l'ipotesi che T sia non contraddittoria.

NB: Il termine "consistent" in lingua inglese, nei lavori matematici, e' usato nel senso di "non contraddittorio". Ormai l'uso del termine "consistente" e' invalso, con lo stesso significato, anche nella letteratura matematica in lingua italiana, anche se alcuni "puristi" preferiscono il termine "coerente". A scanso di equivoci, e per chiarezza, noi useremo sempre l'espressione "non contraddittorio".

- Teoremi di Godel e programma di Hilbert.

Si ritiene generalmente che i Teoremi di incompletezza di Godel implichino l'irrealizzabilita' del programma di Hilbert, per lo meno nella sua formulazione originaria. Per inciso, Hilbert aveva richiesto anche l'esistenza di una teoria completa per la matematica (per esempio, parte del secondo problema nella sua famosa lista), ed e' fuor di dubbio che questo sia irrealizzabile, per il primo teorema di Godel (Godel-Rosser).

Il problema piu' importante, secondo Hilbert, era comunque di dimostrare la non contraddittorieta' della matematica. L'interpretazione usuale e' che il secondo teorema renda cio' impossibile. Alcuni pero', usando l'osservazione menzionata sopra che non esiste un'unica formula che esprime la non contraddittorieta' della teoria T in cui si dimostra il teorema, e alcune di queste formule sono effettivamente dimostrabili in T, hanno sostenuto che i risultati di Godel non rendono impossibile una realizzazione del programma di Hilbert. Anche se questa e' un'opinione minoritaria, va precisato che il programma di Hilbert richiedeva la dimostrazione della non contraddittorieta' di tutta la matematica in una teoria T "finitistica", quindi in una teoria relativamente "debole". Ora, anche interpretando la discussione precedente nel senso che T possa dimostrare la propria non contraddittorieta', il programma di Hilbert richiederebbe la dimostrazione della non contraddittorieta' di una teoria estremamente piu' potente, e partendo da una teoria comunque piu' debole dell'Aritmetica di Peano.

Resta comunque la possibilita' della realizzazione di qualche variante del programma di Hilbert. Una dimostrazione della non contraddittorieta' della teoria dell'aritmetica (Aritmetica di Peano) e' stata trovata da Gentzen. Questa dimostrazione non contraddice il teorema di Godel perche' fa uso di altri metodi (dimostrazioni di lunghezza infinta, o, comunque, che usano infinite formule). Nonostante cio', la dimostrazione di Gentzen viene usualmente considerata come "costruttiva". E' difficile sostenere che la dimostrazione di Gentzen possa essere considerata "finitistica" nel senso di Hilbert; puo' essere comunque considerata come una soluzione parziale del suo programma. Anche in questo caso, pero', vale l'osservazione che i metodi di Gentzen sono ancora ben lontani dal riuscire a dimostrare la non contraddittorieta' di teorie quali la teoria degli insiemi.

In una simile direzione, si e' cercato di ridurre la richiesta, e di vedere se ci sono parti significative della matematica delle quali, in un senso o nell'altro, e' possibile dimostrare la non contraddittorieta'. Questa branca della logica va sotto il nome di "reverse mathematics".

C'e' anche un'altra osservazione che puo' avere un qualche interesse.
Nelle ipotesi dei Teoremi di Godel abbiamo supposto che T fosse una teoria in cui si possono esprimere alcuni fatti dell'aritmetica elementare. Ma anche assumendo solo che gli assiomi di T siano ricorsivi, si puo' comunque costruire un enunciato, diciamo, Coer(T), enunciato in PA (aritmetica di Peano) che intuitivamente esprime la non contraddittorietà di T. Quindi, al di la' della possibile interpretazione degli enti di cui si suppone parli T, e al di là di qualunque discussione riguardante l'ammissibilità o la liceità dell'uso di questi enti, l'enunciato Coer(T) e, più in generale, qualunque dimostrazione all'interno di T, ha un significato puramente aritmetico, cioè può essere codificato come un enunciato di PA o, detto più alla buona, "parla di numeri naturali". Questo è il cosiddetto "paracadute formalista": anche lavorando in una teoria che parla di enti la cui ammissibilità è ritenuta dubbia, si producono comunque dimostrazioni che hanno un significato in teorie, come l'aritmetica, ammissibili al di là di ogni ragionevole dubbio.

Invece, in questo senso, il secondo teorema di Godel si può addirittura estendere. E' vero che, se PA è non contraddittoria, allora in PA non si può dimostrare Coer(PA), per un'appropriata formulazione Coer(PA) all'interno di PA dell'ipotesi della non contraddittorietà di PA. Per una teoria generale T potrebbe invece non essere possibile formulare Coer(T), per esempio se non fosse possibile qualche tipo di godelizzazione. Quindi per T potrebbe non essere nemmeno enunciabile il secondo teorema di Godel. Pero', se T è sufficientemente potente, potrebbe valere l'implicazione Coer(T) => Coer(PA). Questa implicazione si può formulare in PA. Ad esempio, se, dato un qualunque modello di T, si può costruire un modello di PA, allora, nell'ambito della teoria dei modelli, vale Coer(T) => Coer(PA), poiché una teoria è non contraddittoria se e solo se ha un modello. La teoria dei modelli utilizza la teoria degli insiemi, quindi ipotesi metamatematiche molto forti, ma nella maggior parte dei casi i ragionamenti modellistici possono essere adattati e formalizzati all'interno di PA in modo da ottenere Coer(T) => Coer(PA) come teorema di PA. Ma allora, sempre se PA è non contraddittoria, il secondo teorema di Godel implica che Coer(T) non è dimostrabile in PA, poiché altrimenti otterremmo anche una dimostrazione di Coer(PA).
In conclusione, il secondo Teorema di Godel riguarda la non contraddittorietà di teorie facendo riferimento ad una loro "forza" intrinseca, indipendentemente dagli oggetti di cui queste teorie parlano. In altre parole, se si definisce T più forte di U quando Coer(T) => Coer(U) sia dimostrabile (in qualche sistema che estende PA), allora, ovviamente, se Coer(U) non è dimostrabile, allora nemmeno Coer(T) lo è.