Gli assiomi di Kuratowski.

Se (X, τ) è uno spazio topologico, l'operazione di chiusura $\overline{}$ soddisfa alle 4 proprietà elencate nella Proposizione 3.2.6 (vedi dispense).

Viceversa, sia X un insieme qualunque, e sia K una funzione da $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(X)$ che soddisfa alle 4 proprietà. Qui scriviamo $K(A)$ al posto di $\overline{A}$ perchè a priori potrebbe non esistere una topologia corrispondente. Ricordiamo le proprietà.

(1) $K(\emptyset) = \emptyset$,

(2) $A \subset K(A)$, per ogni A,

(3) $K(A) = K(K(A))$, per ogni A,

(4) $K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$.

Data K come sopra, diciamo che un sottoinsieme C di X è un K-chiuso se $K(C) = C$. Allora l'insieme dei K-chiusi di X è l'insieme dei chiusi per una topologia τ (gli aperti di τ sono i complementari dei K-chiusi). L'esercizio è stato svolto nelle esercitazioni, e comunque è una conseguenza degli argomenti seguenti.

Prima di continuare, osserviamo che dalla proprietà (4), segue:

(*) Se $A \subset B$, allora $K(A) \subset K(B)$.

Infatti, se $A \subset B$, allora $A \cup B = B$, quindi $K(B) = K(A) \cup K(B)$, cioè $K(A) \subset K(B)$.

Usando (*) si vede che se K soddisfa alle 4 proprietà e $A \subset X$, allora esiste il più piccolo K-chiuso che contiene A, ed è esattamente $K(A)$. Infatti $K(A)$ è un K-chiuso, per la proprietà (3) e $K(A)$ contiene A per (2). Inoltre da (*) segue che ogni K-chiuso che contiene A contiene anche $K(A)$.

La definizione di una topologia tramite i chiusi e quella usando gli assiomi di Kuratowski sono equivalenti. Infatti, data una topologia, l'operazione di chiusura soddisfa agli assiomi di Kuratowski, e i $\overline{}$-chiusi sono esattamente i chiusi nella topologia originaria, poiché, per qualunque spazio topologico, un sottoinsieme C è chiuso se e solo se $\overline{C} = C$.

Viceversa, data una operazione K che soddisfa alle (4) proprietà, i complementari dei K-chiusi costituiscono la famiglia degli aperti per una topologia. La chiusura corrispondente a questa topologia coincide con K perchè, come detto sopra, $K(A)$ è il più piccolo K-chiuso che contiene A.

Le precisazioni precedenti sono necessarie. Supponiamo che una funzione K soddisfi alle proprietà (1), (2) e (4), ma non necessariamente a (3). Anche sotto queste ipotesi più deboli la famiglia dei K-chiusi è la famiglia dei chiusi per una topologia τ. Infatti, usando (*) e (2) si vede che l'intersezione di una famiglia di K-chiusi è ancora un K-chiuso. Che l'unione di due K-chiusi sia ancora un K-chiuso segue da (4), le altre proprietà sono facili. Però, in generale, la chiusura associata alla topologia τ è diversa da K. Esempio: sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, e sia

$K(\emptyset) = \emptyset$,

$K(A) = \mathbb{N}$ se A è infinito,

$K(A) = [0, 1 + max(A)]$, se A è finito.

Le proprietà (1), (2) e (4) sono verificate, ma (3) no.

Quali sono i K-chiusi?

Quale è la topologia τ su $\mathbb{N}$ i cui chiusi sono i K-chiusi?

Quale è l'operazione di chiusura $\overline{}$ corrispondente a τ?

Una generalizazione della nozione di spazio topologico in cui si considera un'operazione di chiusura che soddisfa solo ad (1), (2) e (4) è stata studiata da E. Čech, vedi *Topological spaces*, Praga, 1966 ed è collegata ad una nozione di convergenza relativa a quelle che vengono chiamate pretopologie. Dettagli tecnici si possono trovare in S. Dolecki, *An Initiation into Convergence Theory* in F. Mynard E. Pearl (a cura di) *Beyond Topology*, AMS, Contemporary mathematic, 2009. Va osservato che nozioni ancora più generali erano state studiate in precedenza da F. Riesz e M. Fréchet, probabilmente anche da altri autori.

Čech ha chiamato uno spazio con una chiusura che soddisfa ad (1), (2) e (4) un *closure space*. Lo stesso nome è però utilizzato da molti autori per operazioni di chiusura che soddisfano solo a (2), (3) e (*). Operazioni di chiusura in quest'ultimo senso sono particolarmente utili in algebra e in logica, perchè corrispondono alla nozione di "generato da". Per esempio, l'operazione K che associa ad un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale il sottospazio generato da A è un'operazione di quest'ultimo tipo. Anche la funzione che associa ad un sottoinsieme A di un gruppo il più piccolo sottogruppo che contiene A è un'operazione di questo tipo. Ulteriori informazioni si possono trovare nel capitolo di M. Erné del libro citato.

Osserviamo solo che le proprietà (2) e (*) sono sufficienti per dimostrare che l'intersezione di una famiglia di K-chiusi è ancora un K-chiuso (ragionando come sopra). In questo caso, però, non è detto che l'unione di due K-chiusi sia chiuso.