Teoria degli insiemi minimale

Paolo Lipparini

18 settembre 2021

Questi appunti sono stati scritti molto di fretta, potrebbero contenere molti errori! Cercherò di rivederli non appena possibile, nel frattempo faccio notare che è molto meritorio da parte degli studenti scoprire errori negli appunti dei docenti!

Questa è una versione incompleta, verrà aggiunto altro materiale.

1. Teoria degli insiemi minimale

Premessa. Lo scopo di questa sezione è quello di presentare nella maniera più breve e semplice possibile, evitando dettagli eccessivamente tecnici, alcune nozioni e idee di teoria degli insiemi che per uno studente, ad esempio di matematica, sarebbe opportuno conoscere [1]. Le sezioni indicate con un asterisco e le note possono essere saltate in prima lettura.

1.1. Nozione intuitiva di insieme. Molte delle definizioni in questa sottosezione potrebbero essere già note al lettore. Preferiamo riepilogarle comunque per completezza e affinché non sussista alcun dubbio riguardo a terminologia e notazioni.

Intuitivamente, un *insieme* è una collezione, un aggregato, un raggruppamento di oggetti. Se x è un insieme, e l'oggetto A appartiene ad x, si scrive $A \in x$ e si dice che A è *un elemento di* x, che A *sta in* x, o altre simili espressioni. Per brevità, talvolta si scriverà $A, B \in x$ per intendere che contemporaneamente $A \in x$ e $B \in x$. Se A non appartiene ad x, si scrive $A \notin x$.

1.1.1. *Uguaglianza fra insiemi.* Due insiemi x e y si considerano *uguali*, cioè identici, e si scrive $x = y$, se x e y contengono *esattamente* gli stessi oggetti[2] .

La precedente affermazione è chiamata *Principio di estensionalità*. Ad esempio, gli insiemi descritti dalle seguenti clausole (a) - (c′) sono uguali:

[1] Con questo non intendiamo affatto sostenere che lo studio di queste note avvantaggerà necessariamente lo studente nel sostenere gli esami. Speriamo però che lo aiutino ad avere una visione più chiara di quello che in realtà sta facendo.

[2] L'introduzione dell'uguaglianza come presentata sopra a prima vista potrebbe sembrare una semplice definizione, ma in realtà si tratta di un'assunzione forte. Si richiede che due insiemi uguali soddisfino esattamente le stesse proprietà; cioè, ad esempio, se $x = y$, allora, per ogni insieme z, deve valere $x \in z$ se e solo se $y \in z$.

(a) L'insieme $\{4, 6, 8\}$ che contiene esattamente i numeri 4, 6, 8.

(a$'$) L'insieme $\{6, 8, 4\}$.

(b) L'insieme $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{x è un numero naturale pari e } 3 \leq x \leq 9\}$ costituito da tutti i numeri naturali pari compresi fra 3 e 9. Ricordiamo che i numeri naturali sono 0, 1, 2... e che l'insieme di tutti i numeri naturali[3] si indica con $\mathbb{N}$.

(c) L'insieme $\{2t \mid t \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < t < 5\}$ di tutti i numeri che possono essere espressi nella forma $2t$ al variare di t fra i numeri naturali strettamente compresi fra 1 e 5.

(c$'$) L'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un } t \in \mathbb{N} \text{ tale che } t = 2n \text{ e } 1 < t < 5\}$ (l'espressione fra graffe in (c) può essere considerata un'abbreviazione dell'espressione indicata qui in (c$'$)).

Quindi l'uguaglianza fra due insiemi dipende solo dagli elementi che essi contengono, ed è completamente indipendente dal modo in cui questi insiemi vengono definiti o descritti; in particolare, è indipendente dall'ordine in cui vengono eventualmente elencati i loro elementi. In altre parole, almeno in linea di principio, un insieme x risulta ben definito quando esiste una netta e precisa distinzione fra gli elementi che appartengono ad x e quelli che non vi appartengono, cioè quando è perfettamente chiaro[4] cosa appartiene e cosa non appartiene ad x.

---

[3] Alcuni autori non includono il numero 0 fra i numeri naturali (questo corrisponde all'origine storica dell'idea di numero naturale); altri autori includono il numero 0 e indicano con $\mathbb{N}^*$ oppure con $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali escluso lo 0. Dovrebbe risultare chiaro che non si tratta di una questione sostanziale, ma esclusivamente di convenzioni di comodo. Non sempre esistono notazioni e convenzioni universalmente accettate in matematica. In questo e altri casi, quando si tratta di convenzioni e definizioni, è sempre opportuno consultare il testo che si sta leggendo, facendo riferimento con attenzione alle notazioni usate. Beninteso, può essere difficoltoso passare da un testo all'altro, specie se i testi fanno uso di notazioni e definizioni molto diverse.

[4] Esiste una teoria degli insiemi "sfumati", dove l'appartenenza di qualche oggetto ad un insieme è incerta o ha valori probabilistici. Qui ci limiteremo alla teoria classica.

È anche ovvio che espressioni del tipo "precisa distinzione", "chiaro" etc. sono altrettanto vaghe quanto "aggregato", "raggruppamento" etc. Questa osservazione non costituisce certo un problema, visto che in questa sottosezione ci limitiamo a presentare le nozioni intuitivamente. Va però fatto notare che, mentre la definizione (o meglio, presentazione) degli insiemi come collezioni non sembra poter dare adito a molti tipi diversi di interpretazione, invece parlare di "netta distinzione" può dar luogo a differenti interpretazioni. Esistono collezioni, dette *ricorsivamente enumerabili* per cui esiste una procedura effettiva che elenca tutti gli elementi di una tale collezione. Ma non sempre è detto che esista una procedura effettiva che elenca tutti gli elementi che *non* vi appartengono (qui supponiamo per semplicità di considerare solo collezioni di numeri naturali). Certamente qualcuno potrebbe interpretare come "non perfettamente chiara" la definizione di tale insieme, perchè non si è in grado di conoscere con esattezza quali numeri non vi appartengono (e, comunque, il problema si presenterebbe per il suo complementare). Questo è il motivo per cui abbiamo precisato "in linea di principio". Problemi di questo tipo non si presenteranno nella teoria assiomatica, dove si precisa in ogni dettaglio quali sono gli insiemi di cui si assume l'esistenza. Resta il fatto che nella teoria assiomatica usuale è richiesta l'esistenza di insiemi di natura molto astratta che qualcuno potrebbe non ritenere corrispondente alla nozione intuitiva appena descritta.

Non solo, un dato elemento non può appartenere ad un insieme "più di una volta", in altre parole, nella nozione di appartenenza non si considerano "molteplicità". Gli insiemi $\{4, 6, 8\}$ e $\{4, 4, 6, 6, 8, 8, 8\}$ vanno considerati come lo stesso insieme[5].

D'ora in poi le lettere romane corsive minuscole $a, b, \dots, x, y \dots$ (e talvolta anche maiuscole $A, B, \dots$) indicheranno sempre insiemi, anche senza che questo venga dichiarato esplicitamente.

1.1.2. *Sottoinsiemi.* Se tutti gli elementi di un certo insieme x appartengono ad un altro insieme y, si dice che x è un *sottoinsieme* di y, oppure che x è *contenuto* in y, o anche che y *contiene* x, e si scrive $x \subseteq y$. In altre parole, $x \subseteq y$ significa che, per ogni z, si ha che $z \in x$ implica $z \in y$.

Osserviamo che la nozione di appartenenza $\in$ e quella di essere sottoinsieme $\subseteq$ sono ben distinte fra di loro. Per esempio, per ogni insieme x, è vero che $x \subseteq x$. Invece non sempre[6] è vero che $x \in x$. Ad esempio, se $\emptyset$ indica l'insieme che non ha elementi, sicuramente $\emptyset \notin \emptyset$. È perciò curioso notare che la maggior parte degli autori che hanno usato la teoria degli insiemi all'inizio sembra confondessero (per lo meno a livello di notazione) i due concetti. La distinzione esplicita fra le due nozioni sembra dovuta a Giuseppe Peano.

Se $x \subseteq y$ e $x \neq y$, si dice che x è un *sottoinsieme proprio* di x, e si scrive $x \subset y$, oppure $x \subsetneq y$. Osserviamo che, per ragioni tipografiche, molti testi, specie in passato, usavano $x \subset y$ col significato che abbiamo attribuito qui a $x \subseteq y$. Ribadiamo che, per quanto riguarda convenzioni, notazioni e definizioni, è sempre opportuno fare riferimento al testo che si sta utilizzando, leggendo con attenzione le parti introduttive.

In particolare, $x = y$ vale se e solo se valgono sia $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$.

1.1.3. *Variabili e costanti*.* È importante notare che le lettere x e t nelle condizioni (b) e (c) precedenti sono da considerare come *variabili*, nel senso che possono essere sostituite da altre lettere senza modificare la definizione[7].

---

[5] Esiste la nozione di "multiinsieme", in cui si tiene conto di eventuali molteplicità. I multiinsiemi sono talvolta utili, particolarmente nella combinatoria finita. Sembra comunque più comodo definire i multiinsiemi in termini di insiemi, anziché viceversa. In questo senso, un multiinsieme può essere definito formalmente come una coppia (X, m) dove m è una funzione da X in $\mathbb{N}$, o eventualmente in un insieme di cardinali, se si ammettono molteplicità infinite.

[6] In effetti, solitamente si assume addirittura che $x \in x$ non valga mai. Esistono comunque teorie "alternative" degli insiemi in cui è ammessa la possibilità di insiemi che appartengono a se stessi.

[7] Avendo naturalmente l'accortezza di non utilizzare lettere già utilizzate in precedenza, cioè di non sovrapporre le notazioni. Ad esempio, posso sostituire n con m nella condizione (c$'$) precedente, ottenendo $\{m \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un } t \in \mathbb{N} \text{ tale che } t = 2m \text{ e } 1 < t < 5\}$. Ma se invece sostituissi n con t, otterrei $\{t \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un } t \in \mathbb{N} \text{ tale che } t = 2t \text{ e } 1 < t < 5\}$, definizione di dubbia comprensibilità, e che fornisce l'insieme che non ha nessun elemento, visto che non esiste nessun t tale che contemporaneamente $t = 2t$ e $1 < t < 5$. In alcune delle definizioni che seguono daremo per scontato che non si verificano situazioni come quella appena descritta. In senso strettamente formale, a volte andrebbe precisata una condizione in cui si dichiara che una certa variabile va scelta fra variabili non ancora utilizzate.

Per esempio, la definizione data in (b) sarebbe completamente equivalente se scritta nella forma $\{y \in \mathbb{N} \mid y$ è un numero naturale pari e $3 \leq y \leq 9\}$. Concettualmente, questa osservazione non dovrebbe comportare particolari difficoltà. Per fare il paragone con una situazione più elementare, risolvere l'equazione $x^3 - 1$ (nella variabile x) equivale a risolvere l'equazione $y^3 - 1$ (nella variabile y). Del resto (come succede anche nel caso della risoluzione di equazioni quando compaiono parametri!) a volte solo dal contesto si è in grado di capire quali sono le variabili e quali sono le costanti. Ad esempio, si consideri la seguente frase:

Sia r un numero reale fissato e sia $X = \{nr \mid n \in \mathbb{N}\}$ ...

Nella definizione di X la variabile è n, e r va considerato come una costante, o un parametro. Una descrizione più concreta di X potrebbe essere $X = \{0, r, 2r, 3r, \dots\}$.

Secondo la convenzione più comune in matematica (ma talvolta vi sono eccezioni) si ammette che variabili distinte possano assumere lo stesso valore, per esempio $2 \in \{n^2 + m^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, perché posso considerare $m = n = 1$.

1.1.4. *Operazioni fra insiemi.* Possono essere definite in maniera naturale molte operazioni fra insiemi. Per esempio, l'*intersezione* $x \cap y$ di due insiemi x e y è l'insieme z che ha per elementi esattamente gli oggetti che sono elementi sia di x che di y. In altre parole, z è il più grande insieme contenuto sia in x che in y.

In maniera simile, l'*unione* $x \cup y$ di due insiemi x e y è l'insieme z che ha per elementi esattamente gli oggetti che sono elementi di almeno uno fra x che di y (è compreso il caso in cui un elemento stia contemporaneamente in x e y). Stavolta, z è il più piccolo insieme che contiene sia x che y.

Il *complemento di y in x* è l'insieme $x \backslash y = \{z \in x \mid z \notin y\}$. Come accennato in precedenza, è ammesso come insieme l'insieme che non ha elementi; esso viene chiamato *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$. Per il principio di estensionalità tutti gli insiemi senza elementi sono uguali o, più brevemente, l'insieme vuoto è unico. Questo giustifica l'uso dell'articolo determinativo quando diciamo *l'insieme* vuoto. Sempre per il principio di estensionalità, tutti gli insiemi che abbiamo introdotto poco sopra sono definiti univocamente, e questo giustifica l'introduzione della notazione che li indica. Notiamo che $x \setminus x = \emptyset$, per ogni insieme x.

Gli insiemi possono contenere altri insiemi come oggetti. In effetti, tutti gli insiemi che considereremo avranno come loro elementi esclusivamente altri insiemi[8].

---

[8] Si può sviluppare tutta o praticamente tutta la matematica utilizzando solo gli insiemi, cioè codificando sotto forma di insiemi tutti gli oggetti matematici di cui si ha necessità. O, se si preferisce, costruendo una copia "isomorfa" all'interno della teoria degli insiemi di ciascuna struttura matematica di cui si ha necessità. Ad esempio, vedremo in seguito un metodo per introdurre i numeri naturali sotto forma di insiemi. Da un lato questo modo di trattare gli oggetti matematici può apparire artificioso; d'altro canto ha il vantaggio concettuale di "non moltiplicare le entità". In ogni caso, è stato fatto notare che è tipico della matematica studiare i propri oggetti indipendentemente dal modo in cui vengono presentati o costruiti, cioè basandosi solo sulle relazioni che si suppone valgano fra di loro. Quindi il problema di stabilire se gli (altri) oggetti matematici vadano effettivamente considerati insiemi oppure no è sicuramente un problema di scarso interesse matematico.

Questo aspetto non è comunque fondamentale per la teoria degli insiemi. Si possono dividere gli oggetti di cui si tratta in due categorie, gli insiemi veri e propri e gli altri

Per esempio, il *singoletto* $\{x\}$ è l'insieme che ha x come unico elemento. Cioè, per qualunque z, si ha $z \in \{x\}$ se e solo se $z = x$.

La *coppia (non ordinata)* $\{x, y\}$ è l'insieme che ha come unici elementi x e y. Osserviamo che, per il principio di estensionalità, $\{x, y\} = \{y, x\}$. Inoltre, $\{x, x\} = \{x\}$.

È spesso utile considerare una *coppia ordinata* (x, y) di due insiemi x e y. Si richiede che questa nozione di coppia ordinata soddisfi alla seguente proprietà:

(C) dati x, y, x_1, y_1 qualunque, si ha che $(x, y) = (x_1, y_1)$ vale se e solo se valgono contemporaneamente $x = x_1$ e $y = y_1$.

Naturalmente, si potrebbe pensare di introdurre una nuova nozione di "insieme ordinato". Questo non è però necessario: la nozione di coppia ordinata si può comunque introdurre senza "moltiplicare le entità"; una possibile definizione è $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Lasciamo al lettore il compito di verificare che la coppia ordinata definita come sopra[9]soddisfa effettivamente alla proprietà (C). Suggerimento: trattare separatamente i casi $x \neq y$ e $x = y$.

Il *prodotto (cartesiano)* $A \times B$ di due insiemi A e B è l'insieme $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ di tutte le coppie ordinate con primo elemento in A e secondo elemento in B. Una *relazione* R da A verso B è un sottoinsieme di $A \times B$. In questo modo si può definire la nozione di funzione e, in seguito, tutte[10] le nozioni usate in matematica, le cui definizioni (nei rari casi in cui avremo bisogno di usarle) supporremo generalmente note al lettore.

Un'altra costruzione fondamentale in matematica è quella dell'*insieme potenza*, o *insieme delle parti*. Se x è un insieme, il suo insieme potenza $\mathcal{P}(x)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di x. In altre parole, per un insieme qualunqe y, abbiamo $y \in \mathcal{P}(x)$ se e solo se $y \subseteq x$.

1.1.5. *Cardinalità.* Si dice che due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalità, e si scrive $|X| = |Y|$, se esiste una funzione biiettiva da X su Y. Si dice che la

"oggetti" che non sono insiemi (spesso chiamati "urelementi", dal tedesco). Solo gli insiemi possono avere elementi, e questi elementi possono essere sia altri insiemi sia "urelementi". Invece gli urelementi non possono avere elementi. Il principio di estensionalità si applica solo agli insiemi, e gli "urelementi" si distinguono fra di loro per aspetti che stanno al di fuori della teoria degli insiemi e si considerano noti in altro modo. Esistono pochi ambiti molto tecnici e specialistici in cui l'uso degli urelementi si rivela necessario. Noi non avremo la necessità di considerare urelementi.

[9] Naturalmente questa definizione di coppia ordinata può apparire artificiosa e poco naturale. Se, da un lato, si tratta comunque di una convenzione, è ovvio che invece lavorare con due nozioni distinte di insieme (non ordinato e ordinato) comporterebbe alla lunga complicazioni ben peggiori. L'unico fatto importante, comunque, è che la proprietà (C) è soddisfatta.

[10] o quasi, secondo l'opinione di alcuni. Rimandiamo il lettore interessato, ad esempio, all'interessante articolo (su sviluppi recenti del dibattito sui fondamenti della matematica) di P. Maddy, *Set-theoretic foundations* apparso in Andrés Eduardo Caicedo, James Cummings, Peter Koellner, Paul B. Larson (editors), *Foundations of Mathematics, Logic at Harvard, Essays in Honor of W. Hugh Woodin's 60th Birthday March 27–29, 2015, Harvard University, Cambridge, MA*, Contemporary Mathematics Volume 690, 2017. Può essere anche utile consultare gli ulteriori riferimenti bibliografici ivi indicati.

cardinalità di X è minore o uguale alla cardinalità di Y, e si scrive $|X| \leq |Y|$, se esiste una funzione iniettiva da X in Y. La cardinalità di X è strettamente minore della cardinalità di Y, scritto $|X| < |Y|$ se esiste una funzione iniettiva da X in Y, ma non esiste una funzione biiettiva, cioè se $|X| \leq |Y|$ ma non $|X| = |Y|$.

Le notazioni precedenti sottintendono che si possa definire la nozione di cardinalità di un insieme. Nel caso degli insiemi finiti basta scegliere un insieme "tipico" con la cardinalità voluta, ad esempio, $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ per un insieme X con n elementi, e affermare che la cardinalità di X è n, scrivendo $|X| = n$. Nel caso degli insiemi infiniti, in una teoria formalizzata, scegliere un insieme rappresentativo per una data cardinalità può comportare problemi. Nella teoria intuitiva si può comunque assumere di poter effettuare una tale scelta e di usare il termine cardinalità e notazioni analoghe alle precedenti con questo significato. Altrimenti si può osservare che, in generale, la nozione di cardinalità compare quasi esclusivamente nel confrontare insiemi fra di loro.

Ad esempio, un classico teorema di Cantor viene frequentemente enunciato affermando che per ogni insieme x la sua potenza $\mathcal{P}(x)$ ha cardinalità strettamente maggiore di x, cioè $|x| < |\mathcal{P}(x)|$. Mentre l'enunciato precedente è sicuramente sintetico e intuitivamente chiaro, non c'è bisogo di utilizzare la nozione di cardinalità per enunciare il Teorema di Cantor nella forma seguente.

Teorema di Cantor. *Sia x un insieme qualunque. Allora non esiste una funzione iniettiva da $\mathcal{P}(x)$ ad x, mentre esiste una funzione iniettiva da x in $P(x)$.*

Dimostrazione. Fissiamo x. La funzione che manda a in $\{a\}$, per $a \in x$, è evidentemente iniettiva da x in $\mathcal{P}(x)$, dunque dimostra la seconda affermazione.

Per l'altra affermazione, dimostriamo prima che non esiste una funzione suriettiva da x in $\mathcal{P}(x)$. Se per assurdo esistesse una tale funzione, diciamo f, si consideri l'insieme $A = \{\, a \in x \mid a \notin f(a) \,\}$. Siccome f è suriettiva, esiste $a \in x$ tale che $f(a) = A$. Ma allora, per la definizione di A, abbiamo $a \in A$ se e solo se $a \notin f(a)$, cioè $a \notin A$, assurdo. [[NB: la somiglianza con il paradosso di Russell [...]]]

Per finire, se esistesse $g : \mathcal{P}(x) \to x$ iniettiva, possiamo ottenere $f : x \to \mathcal{P}(x)$ suriettiva ponendo

$$f(a) = \begin{cases} B & \text{se esiste } B \in \mathcal{P}(x) \text{ tale che } g(B) = a, \\ \emptyset & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

una contraddizione, per il paragrafo precedente. Il B nella definizione precedente, se esiste, è unico poiché g si supponeva iniettiva, quindi f è effettivamente una funzione; e il vuoto nella seconda riga potrebbe essere sostituito da qualunque altro sottoinsieme di x. □

[[Teorema di Cantor Schröder-Bernstein [...]]]

1.1.6. *Uso degli insiemi come linguaggio e uso sostanziale**. [...]

1.2. L'impostazione assiomatica. Le argomentazioni nella sottosezione precedente sono esclusivamente intuitive. Le argomentazioni matematiche, solitamente, richiedono invece una maggiore precisione, in particolare, si richiede di specificare esattamente tutte le ipotesi che vengono usate. Alcune assunzioni vengono prese come basi di partenza, e chiamate *assiomi*. A partire da queste assunzioni, mediante ragionamenti logici, si otterranno i teoremi e le altre conclusioni. I ragionamenti così effettuati dovrebbero risultare validi indipendentemente dalla concezione intuitiva degli oggetti trattati. Questo modo di procedere prende il nome di *metodo assiomatico*[11].

Quasi tutte le branche della matematica sono state trattate in maniera assiomatica, anche nel caso in cui le nozioni usate non comportassero nessuna problematicità. Illustri matematici hanno invece spesso messo in dubbio la liceità dell'uso degli insiemi in matematica. Questa constatazione, unita ai problemi e paradossi a cui accenneremo in seguito, suggerisce che in questo caso esiste l'effettiva necessità di una trattazione assiomatica. È importante notare che la trattazione assiomatica non è assolutamente un mezzo per liberarsi dalle controversie o per garantire un tipo di validità assoluta ai metodi che fanno uso degli insiemi. Tutto il contrario! Semplicemente, se si deve discutere su quali metodi possono essere considerati validi o meno, meglio specificare con precisione ciò su cui si sta discutendo.

Grossomodo e a volte con particolari precisazioni, gli assiomi che indicheremo riguardo agli insiemi sono accettati dalla comunità dei matematici[12].

---

[11] Nella concezione moderna, gli assiomi non sono interpretati come verità assolute imposte in maniera dogmatica. A volte li si intende come verità intuitivamente evidenti riguardanti certi oggetti particolari, altre volte semplicemente come ipotesi di lavoro che possono o meno essere valide. Secondo questo modo di vedere, l'attività del matematico non fornirebbe verità assolute, presenterebbe solo ragionamenti del tipo: *ammettendo queste e queste ipotesi si ottengono queste e queste conclusioni.* Va da sè che in molti casi queste deduzioni sono tutt'altro che ovvie, sono di una complessità notevole e talvolta vengono giudicate di estrema bellezza o profondità. Ci premeva soltanto sottolineare che decidere sulla validità o meno delle ipotesi non viene considerato solitamente un problema di tipo matematico; il problema viene demandato ad altri, ad esempio, ai fisici (o, qualora non sia necessaria una soluzione immediata, ai filosofi).

Naturalmente, se si richiedesse un rigore assoluto, si dovrebbero specificare esattamente anche quali sono i metodi di ragionamento da considerare validi. Questo può essere fatto, ma esula dall'argomento della presente nota. Rimandiamo il lettore interessato ad un qualunque testo di logica matematica, ad esempio il testo di Mendelson che citeremo nella sezione sulle altre letture. Allo stesso modo di quanto osserveremo riguardo agli assiomi, dichiarare esplicitamente i metodi logici che vengono utilizzati non implica necessariamente la loro validità. D'altro canto, fra la maggior parte dei matematici, risulta esserci un consenso implicito su quali siano i ragionamenti corretti. Noi accetteremo questa pratica senza ulteriori precisazioni, rimandando di nuovo il lettore al libro citato o ad altri testi dedicati esplicitamente ai fondamenti della matematica.

[12] Molte parti della matematica tradizionale possono essere sviluppate facendo uso di sistemi di assiomi molto più deboli di quello che presenteremo. Il campo di ricerca che si occupa di trovare le ipotesi minimali necessarie per dimostrare teoremi classici va sotto il nome di *reverse mathematics* e ha ottenuto risultati di particolare interesse, ad esempio l'identificazione di un piccolo numero di sistemi di assiomi che "misurano" esattamente la complessità delle ipotesi necessarie in un gran numero di casi. Si veda S. G. Simpson,

Siccome il nostro scopo è di presentare gli argomenti evitando quanto più possibile i dettagli tecnici, trascureremo alcuni assiomi senza descriverli in dettaglio. Questi assiomi sarebbero necessari per realizzare certi obiettivi particolari. Facciamo riferimento ai testi che verranno indicati in seguito per una trattazione più completa e rigorosa. Ci sentiamo corroborati in questa nostra scelta di privilegiare la semplicità alla completezza dal fatto che alcuni dei dettagli tecnici che sarebbero necessari sfuggirono, a suo tempo, anche a grandi personalità matematiche.

1.2.1. *Nozioni primitive.* Oltre agli assiomi, è necessario precisare anche le nozioni di cui si tratta. Altre nozioni e concetti potranno essere introdotti mediante definizioni, ma le nozioni di partenza non possono essere definite, a meno di non cadere in un circolo vizioso. In teoria degli insiemi gli unici concetti di base sono quelli di *insieme* e di *appartenenza.* Per comodità utilizzeremo anche la nozione di uguaglianza, supponendo che per essa valgano le proprietà intuitive.

1.2.2. *Principio di estensionalità.* Come precisato sopra, due insiemi si considerano uguali se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi. Il nostro primo assioma sarà dunque il seguente.

(Principio di Estensionalità) Due insiemi sono uguali se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi.

Intuitivamente il Principio di estensionalità fornisce una "definizione" di insieme, corrispondente alla nozione informale introdotta nella precedente sottosezione. Va comunque considerato come un assioma vero e proprio. Ovviamente, il Principio di estensionalità non può essere usato per dimostrare l'esistenza di insiemi. È quindi necessario introdurre ulteriori assiomi.

1.2.3. *Assiomi per la costruzione di insiemi.*

(Assioma della Coppia) Dati due insiemi qualunque x e y, esiste un insieme $\{x, y\}$ che ha per elementi esattamente x e y.

L'assioma della coppia si può esprimere in linguaggio simbolico come
$\forall xy \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$,

---

Subsystems of Second Order Arithmetic, Second edition, 2009. È modesto parere di chi scrive che questo campo di ricerca è ingiustamente trascurato e non sta ricevendo tutta l'attenzione che meriterebbe. In fondo, è caratteristico della matematica cercare di dimostrare teoremi utilizzando ipotesi minimali.

Come argomento collegato, ma da una prospettiva diametralmente opposta, alcuni problemi matematici complessi non sono risolvibili nella teoria standard degli insiemi, e hanno soluzione solo assumendo ulteriori assiomi. Le tecniche che si occupano di questi argomenti sono estremamente sofisticate e includono, fra gli altri, il cosiddetto *forcing*, i *modelli interni*, i *grandi cardinali*, l'*ipotesi di determinatezza.* Il lettore interessato può approfondire l'argomento dapprima studiando il libro di Jech e, in seguito, l'*Handbook of Set Theory*, entrambi citati nella sezione sulle ulteriori letture. Una presentazione introduttiva di alcuni argomenti si può trovare in A. Andretta, *I teoremi di assolutezza in teoria degli insiemi*, in due parti, https://eudml.org/doc/262079 e https://eudml.org/doc/262088 dove $\vee$ significa "oppure" (in senso inclusivo, ovvero nel senso che può verificarsi una o l'altra possibilità, e possono anche verificarsi entrambe contemporaneamente). Lasciamo per esercizio al lettore di verificare che tutti gli assiomi che enunceremo si possono scrivere in un linguaggio simbolico come sopra. Mentre cercheremo di essere il meno formali possibile, la necessità di un simile trattamento formale apparirà chiara quando enunceremo l'assioma di separazione più sotto.

Per il principio di estensionalità, data una qualunque coppia di insiemi x e y, l'insieme la cui esistenza è stabilita dall'assioma della coppia è unico, e quindi può essere effettivamente indicato con $\{x, y\}$. D'ora in poi quando un assioma implica l'esistenza di un insieme definito univocamente per estensionalità, daremo direttamente un nome a quest'insieme senza ulteriori precisazioni. Va comunque notato che è necessario fare uso dell'assioma di estensionalità, affinché ciò sia giustificato.

Nell'enunciato dell'assioma della coppia è possibile avere $x = y$; in questo caso si otterrà il singoletto $\{x\}$. In particolare, la coppia ordinata $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ si può costruire iterando l'assioma della coppia.

Enunceremo adesso l'assioma dell'unione. Questo assioma ci permette di costruire l'unione $x \cup y$ due insiemi qualunque x e y. Come già precisato $x \cup y$ ha per elementi esattamente tutti gli insiemi che sono elementi di x oppure sono elementi di y (oppure di entrambi). Più in generale, data una famiglia di insiemi $\{A_i \mid i \in I\}$, l'assioma ci permette di costruire un insieme $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni insieme z, si ha che $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ se e solo se esiste $i \in I$ tale che $z \in A_i$.

Qui l'espressione *famiglia* è sinonimo di insieme, ed è usata solo per evitare ripetizioni. La presentazione appena fornita dell'assioma dell'unione ci sembra intuitivamente chiara, ma dovremmo dare un significato preciso all'espressione $\{A_i \mid i \in I\}$. In seguito questo significato verrà reso esplicito, ma va notato che non sempre abbiamo la possibilità di dimostrare l'esistenza di "famiglie" del tipo $\{A_i \mid i \in I\}$, in base ai soli assiomi che abbiamo introdotto finora. In ogni caso, per enunciare la versione rigorosa e "ufficiale" dell'assioma dell'unione non c'è la necessità di considerare famiglie "indicizzate", quindi, formalmente, l'eventuale indicizzazione risulta una complicazione anziché una semplificazione. Tuttavia, forse, il seguente enunciato dell'assioma può apparire meno intuitivo. L'insieme $\mathcal{F}$ considerato nell'assioma seguente va comunque pensato come una famiglia di insiemi.

(Assioma dell'Unione) Dato un qualunque insieme $\mathcal{F}$, esiste l'insieme $\bigcup \mathcal{F} = \{z \mid \text{esiste } h \in \mathcal{F} \text{ tale che } z \in h\}$.

Cioè, per ogni z, $z \in \bigcup \mathcal{F}$ se e solo se esiste $h \in \mathcal{F}$ tale che $z \in h$.

Osserviamo che non è scontato che la forma finita dell'assioma dell'unione segue dalla forma generale. Dobbiamo usare l'assioma della coppia per costruire $\{x, y\}$. Dopodiché $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$.

Usando gli assiomi della coppia e dell'unione possiamo costruire terne $\{x, y, z\}$ come $\{x, y\} \cup \{z\}$, e così via. È invece curioso osservare che non abbiamo bisogno dell'assioma dell'unione per costruire le *terne ordinate*, mediante la definizione $(x, y, z) = ((x, y), z)$.

(Assioma dell'insieme Potenza (o delle Parti)) Dato un insieme qualunque x, esiste l'insieme $\mathcal{P}(x)$ che ha per elementi esattamente tutti i sottoinsiemi di x.

Usando gli assiomi introdotti finora, si può tentare di costruire il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B. Se $a \in A$ e $b \in B$, per l'assioma della coppia esistono il singoletto $\{a\}$ e la coppia $\{a, b\}$. Applicando di nuovo l'assioma della coppia con $x = \{a\}$ e $y = \{a, b\}$, abbiamo la coppia ordinata $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Inoltre, siccome $a \in A$, abbiamo $\{a\} \subseteq A$ e, quindi, $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Siccome $a, b \in A \cup B$, abbiamo anche $\{a, b\} \subseteq A \cup B$ e $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Siccome $A \subseteq A \cup B$, abbiamo inoltre $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (perché ogni sottoinsieme di A è anche sottoinsieme di $A \cup B$). In conclusione, sia $\{a\}$ che $\{a, b\}$ appartengono a $\mathcal{P}(A \cup B)$, quindi $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, da cui segue $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. Quindi abbiamo che, se $A \times B$ esiste, $A \times B \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. Ma, naturalmente, $A \times B \neq \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. Per poter costruire $A \times B$ abbiamo quindi bisogno di un assioma che, dato un insieme W, ci autorizzi a costruire il sottoinsieme di W costituito da tutti gli elementi di W che soddisfano ad una certa proprietà. Costruzioni di questo tipo vengono effettuate in continuazione in matematica, lo studente avrà ascoltato numerose volte frasi del tipo "Sia X l'insieme di tutti i numeri reali tali che ..." e simili, dove al posto dei puntini possono apparire svariate espressioni di vario tipo, a volte anche estremamente complesse. L'assioma che ci serve è dunque il seguente.

(Assioma di Separazione) Per ogni insieme W e ogni "proprietà" φ, esiste l'insieme $\{x \in W \mid \varphi(x)\}$, cioè l'insieme costituito da tutti gli elementi di W per cui vale la proprietà φ.

Formalmente, l'assioma di separazione viene considerato non come un singolo assioma, ma come un'infinità di assiomi, uno per ogni "proprietà" φ. Questo si esprime solitamente dicendo che si tratta di uno *schema* di assiomi.

Più sostanziale è la richiesta di definire esattamente cosa si intenda per "proprietà". Sebbene esistano possibilità alternative, per *proprietà* si intende solitamente (una proprietà definita da) un'espressione simbolica[13] che può essere costruita in maniera naturale utilizzando i simboli[14] $\in$ e $=$, i connettivi logici $\wedge$ (e), $\vee$ (o), $\neg$ (non), $\Rightarrow$ (implica), variabili $x_1, x_2, \ldots$ e i quantificatori $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste). Il lettore che fosse a conoscenza dei primi rudimenti di logica simbolica riconoscerà sicuramente che le "proprietà" appena introdotte corrispondono esattamente alle formule del calcolo dei predicati del primo ordine nel linguaggio con due relazioni binarie $\in$ e $=$.

Tornando all'esempio precedente, cioè al tentativo di costruire $A \times B$, gli assiomi della coppia, dell'unione e della potenza ci consentono di costruire $\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. Esiste una formula φ che esprime l'affermazione "x è una coppia ordinata con primo elemento in A e secondo elemento in B". Dunque l'assioma di separazione ci consente di costruire l'insieme $\{x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) \mid x \text{ è una coppia ordinata con primo elemento in A e secondo elemento in B}\}$. Per quanto detto sopra, questo insieme è proprio $A \times B$.

1.2.4. *Insiemi ereditariamente finiti.* Gli assiomi presentati finora ci garantiscono la possibilità di costruire certi insiemi a partire da uno o più insiemi dati, ma finora non abbiamo nulla che ci dimostri l'esistenza di almeno un insieme. Se si assume l'esistenza di almeno un insieme W, l'assioma di separazione ci fornisce il vuoto, dato da $\{x \in W \mid x \neq x\}$. Usando poi l'assioma della coppia possiamo costruire altri insiemi come $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ecc.

Gli insiemi che si possono costruire con gli assiomi presentati finora si dicono ereditariamente finiti.

1.2.5. *L'assioma dell'infinito.* Come precisato sopra, è necessario richiedere l'esistenza di almeno un insieme. Anziché richiedere l'esistenza di un insieme qualunque, richiederemo l'esistenza di un insieme che soddisfi ad una particolare proprietà.

---

[13] È abbastanza intuitivo capire quali sono le regole di costruzione per le possibili "formule" φ ammesse nello schema di assiomi di separazione. Per il lettore che richiedesse i dettagli formali, la definizione è data dalle seguenti clausole.

(1) Se x e y sono variabili, allora sia $x \in y$ che $x = y$ sono formule.

(2) Se φ e ψ sono formule e x è una variabile, allora tutte le seguenti sono formule: $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$.

(3) Sono formule tutte e sole le espressioni simboliche che possono essere ottenute in un numero finito di passi applicando (1) e (2).

Alcune condizioni sono pleonastiche, nel senso che, ad esempio, alcuni connettivi o quantificatori possono essere definiti in termini di altri. A volte è necessario inserire opportune parentesi nella costruzione delle formule come sopra, affinché esse risultino di interpretazione non ambigua. I dettagli sono intuitivamente ovvi.

Inoltre si assume la possibilità che φ dipenda da altri parametri, non solo da x. L'assioma garantisce l'esistenza dell'insieme $\{x \in W \mid \varphi(x)\}$ per ogni valore che può assumere ogni eventuale parametro (facendo uso degli altri assiomi, ci si può comunque ridurre equivalentemente al caso di un solo parametro).

[14] Come precisato in precedenza, all'atto pratico si possono usare ulteriori simboli in φ, purchè le formule che contengono questi simboli siano interpretabili come un'abbreviazione di un'altra formula che non contiene i nuovi simboli.

Sarebbe anche molto importante osservare che qui stiamo identificando i simboli con la loro interpretazione. Le due nozioni sono in realtà ben distinte.

(Assioma dell'Infinito) (versione informale) Esiste un insieme infinito.

Forse la definizione di "infinito" può sembrare ovvia. In realtà non è affatto così; addirittura, esistono diverse definizioni di "infinito" che non sono equivalenti, se non sotto certe assunzioni, anche se ciascuna cattura alcune proprietà che intuitivamente caratterizzano le collezioni infinite.

Per esprimere con precisione l'assioma dell'infinito, chiederemo l'esistenza di un insieme che contiene tutti i numeri naturali. Detto in questo modo si tratta di un circolo vizioso, poiché, insiemisticamente, un numero naturale è esattamente un elemento di $\mathbb{N}$. Ma è proprio $\mathbb{N}$ che vogliamo definire! All'inconveniente si può ovviare nel modo che stiamo per spiegare, ma prima descriviamo informalmente i numeri naturali. I primi numeri naturali si definiscono (o si interpretano, se si preferisce) nel seguente modo:

$0 = \emptyset$,

$1 = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$,

$2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$,

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$, e così via.

Potremmo pensare di iterare queste definizioni al seguente modo:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ s(n) &= n + 1 = n \cup \{n\}, \qquad \text{per ogni naturale } n, \end{aligned} \tag{*}$$

ma questa definizione "ricorsiva" è lecita solo se ammettiamo già di conoscere i numeri naturali. La conoscenza dei numeri naturali non è affatto una richiesta forte, ma preferiamo comunque che la teoria che presentiamo sia completamente autosufficiente[15]. Osserviamo che, in base alle definizioni precedenti, abbiamo (intuitivamente) che un numero naturale è l'insieme di tutti i suoi predecessori, e che il numero n ha esattamente n elementi.

Il trucco per "definire l'infinito senza fare uso dell'infinito", essenzialmente dovuto a Dedekind (e formalizzato in questa maniera probabilmente da von Neumann), è il seguente. Diciamo che un insieme I è *induttivo* se $\emptyset \in I$ e, ogni volta che un insieme x appartiene ad I, allora anche il suo *successore* $s(x) = x \cup \{x\}$ appartiene ad I. Così, ricordando le definizioni precedenti, un insieme induttivo contiene $0 = \emptyset$. Ma allora contiene anche $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\} \ldots$

Quindi l'enunciato formale dell'assioma dell'infinito è il seguente.

---

[15] In effetti, anche la definizione di formula, in una nota precedente relativa all'assioma di separazione, è implicitamente data per induzione, quindi comporta la conoscenza di alcune proprietà dei numeri naturali. Il punto sostanziale è che si tratta di due livelli differenti, la nozione di formula è *metamatematica*, ed è praticamente impossibile sviluppare la metamatematica in maniera significativa senza dare per note alcune nozioni e proprietà riguardanti l'aritmetica elementare (o, per lo meno, questa è l'opinione largamente diffusa. Per opinioni diverse, che vengono talvolta classificate sotto il nome *ultrafinitismo*, si veda [...]). Invece, a livello della teoria formale che stiamo sviluppando, tutte le nuove nozioni devono essere definite, inclusa quella di numero naturale. Per maggiori dettagli sulla distinzione fra matematica e metamatematica facciamo riferimento al libro di Mendelson, o a libri più specificatamente dedicati ai fondamenti della matematica.

(Assioma dell'Infinito) Esiste un insieme induttivo I.

Come abbiamo detto, intuitivamente un insieme induttivo contiene tutti i numeri naturali. La definizione di $\mathbb{N}$ sarà dunque la seguente: $\mathbb{N}$ è l'insieme che contiene tutti gli elementi che appartengono a tutti gli insiemi induttivi. La definizione è giustificata in base all'assioma di separazione e siccome, in base all'assioma dell'infinito, esiste almeno un insieme induttivo I. Formalmente,

$$\mathbb{N} = \{n \in I \mid n \text{ appartiene ad ogni insieme induttivo}\},$$

dove è facile costruire una formula che esprime la frase in parole contenuta nell'espressione precedente. Dunque $\mathbb{N}$ esiste, per l'assioma di separazione, ed è facile vedere che la definizione di $\mathbb{N}$ non dipende dalla particolare scelta di un insieme induttivo I. Inoltre è facile controllare che $\mathbb{N}$ stesso è induttivo, quindi contiene 0, 1, ...

Si può vedere che $\mathbb{N}$ con l'operazione di successore soddisfa agli assiomi di Peano-Dedekind, che se $n \neq m \in \mathbb{N}$, allora non esiste una biiezione fra m ed n, e che se $n \in \mathbb{N}$, allora non esiste una biiezione fra n ed $\mathbb{N}$. Si possono dunque finalmente dare le seguenti definizioni. Un insieme x si dice *finito* se esistono un $n \in \mathbb{N}$ ed una biiezione fra x ed n. Un insieme x si dice *infinito* se non è finito; così, per quanto affermato sopra, abbiamo che $\mathbb{N}$ è infinito. Un insieme si dice *numerabile*[16] se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

1.2.6. *Costruzioni ulteriori.* Una volta "costruito" l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, lo si può dotare delle consuete operazioni. Infatti, disponendo dei prodotti cartesiani, un'operazione binaria su $\mathbb{N}$ è (o si può pensare) come un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Una volta costruito $\mathbb{N}$, si può costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri *interi* (positivi e negativi), per esempio pensandolo come opportuno quoziente di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. In questo modo, come è ben noto, risulta facile estendere le operazioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$. La struttura $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali può poi essere introdotta facendo uso di un quoziente di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Supponiamo che queste costruzioni siano note al lettore. In base agli esempi dati, appare evidente come gli assiomi che abbiamo presentato giustifichino queste costruzioni.

La struttura dei numeri reali $\mathbb{R}$ può poi essere introdotta facendo uso delle sezioni di Dedekind, o (di certe classi di equivalenza) delle successioni di Cauchy di numeri razionali, secondo costruzioni che (anche queste!) dovrebbero essere ben note al lettore.

È importante osservare che, mentre i passaggi da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ e da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ non fanno uso sostanziale della teoria degli insiemi (ad esempio, si può sempre considerare un numero razionale come una coppia di interi ridotta ai minimi termini; anzi, è ciò che si fa abitualmente quando i numeri razionali si scrivono sotto forma di "frazioni"), d'altro canto l'introduzione dei numeri reali fa effettivamente uso essenziale degli insiemi. Per esempio, le sezioni di Dedekind sono coppie

[16] Alcuni autori usano "numerabile" nel senso di "finito oppure numerabile". In lingua inglese, solitamente *denumerable* significa "numerabile" secondo la nostra definizione, mentre *countable* significa "finito oppure numerabile".

di *sottoinsiemi* di $\mathbb{Q}$. Qualunque opinione si abbia sulla teoria degli insiemi, ammettere la possibilità di lavorare con numeri reali arbitrari (non definibili da particolari regole od espressioni, come è invece possibile per $\sqrt{2}$ o π, ad esempio), significa comunque ammettere la validità di una teoria equivalente ad un frammento non insignificante della teoria degli insiemi che qui abbiamo presentato. La stessa presentazione assiomatica dei numeri reali, come campo ordinato, archimedeo e completo, dà per nota la conoscenza dei sottoinsiemi di numeri reali (nella definizione di completezza).

1.2.7. *I paradossi.*
Il paradosso di Russell. Nell'enunciare l'assioma di separazione abbiamo fatto riferimento ad un insieme W e ad una proprietà φ, richiedendo l'esistenza dell'insieme $\{x \in W \mid \varphi(x)\}$. Senza far riferimento a qualche insieme W di cui si conosca già l'esistenza, l'assioma relativo porta ad una contraddizione. Il paradosso viene generalmente attribuito a Russell, ma l'argomento era già probabilmente noto anche a Zermelo, e, almeno in forma simile, allo stesso Cantor. Il termine "assioma" viene usato esclusivamente per motivi storici; l'assioma seguente **non** fa parte degli assiomi della teoria che stiamo prendendo in considerazione[17].

("Assioma" di Comprensione (contraddittorio!)) Per ogni proprietà φ, esiste l'insieme $\{x \mid \varphi(x)\}$, cioè l'insieme costituito da tutti gli insiemi per cui vale la proprietà φ.

Vediamo ora che l'assioma di comprensione porta ad una contraddizione. Consideriamo la proprietà $\varphi(x)$ determinata dalla formula $x \notin x$. In questo caso, l'assioma ci fornirebbe l'esistenza dell'insieme $\{x \mid x \notin x\}$, cioè l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi. Supponiamo per assurdo che tale insieme esista e chiamiamolo Z. Allora, per ogni insieme x, si ha

$$x \in Z \text{ se e solo se } x \notin x.$$

Siccome l'assioma di comprensione ci garantisce (o, meglio, garantirebbe) che Z sia un insieme, e siccome la formula precedente deve valere per qualunque insieme x, possiamo sostituire Z ad x ottenendo

$$Z \in Z \text{ se e solo se } Z \notin Z,$$

una contraddizione. [...]

1.2.8. *Insiemi e classi.* Può essere comodo poter parlare della "collezione" di tutti gli insiemi, o della "collezione" di tutti i gruppi, etc. Come abbiamo visto, se non si prendono opportune precauzioni, questa "libertà di espressione" potrebbe portare a contraddizioni. Si possono comunque introdurre oggetti di

[17] Va comunque precisato che l'assioma non porta necessariamente a contraddizioni nelle teorie in cui si fa la distinzione fra insiemi e classi. Vedi la sottosezione *Insiemi e classi.* Un altro modo per conservare l'assioma di comprensione e non ottenere palesi contraddizioni è quello di porre limitazioni alle formule che definiscono le "proprietà" che si prendono in considerazione. Teorie basate su questa possibilità sono state proposte da W. Quine.

questo tipo, purchè li si tengano distinti dagli insiemi, come li abbiamo appena descritti (o assiomatizzati).

Intuitivamente si può pensare ad una classe propria come ad una collezione "troppo grande" per appartenere ad un altro insieme. Nella teoria degli insiemi che stiamo presentando le classi proprie si introducono come abbreviazioni.

Ad esempio, se φ è una "proprietà" si può considerare la classe $K = \{ x \mid \varphi(x) \}$. Come abbiamo appena visto, in generale, le classi definite in questo modo non possono essere considerate insiemi, se non vogliamo ottenere contraddizioni. Allora $x \in K$ va considerata semplicemente come un'abbreviazione dell'enunciato $\varphi(x)$.

Può però darsi che una classe definita come sopra sia (o si possa considerare come) un insieme. Questo succede se esiste un insieme x che ha esattamente gli stessi elementi di K. Infatti enunciare il principio di estensionalità anche per le classi non comporta particolari problemi. Se H è un'altra classe, allora $H \in K$ è un'abbreviazione di: *esiste un x tale che $x = H$ e $\varphi(x)$* (osserviamo che qui le variabili $x, z, \ldots$ si intendono variare fra insiemi, non classi).

Esistono teorie (sotto certi aspetti più eleganti, ma meno usate) in cui l'unica nozione primitiva è quella di classe (oltre ovviamente a quella di appartenenza); in queste teorie un insieme è, per definizione, una classe che appartiene ad almeno una classe. Una classe che non appartiene a nessun insieme viene detta *classe propria*.

In questo senso, il paradosso di Russell viene inteso semplicemente come una dimostrazione che la classe di tutti gli insiemi è una classe propria. Perchè se invece fosse un insieme, potremmo utilizzare l'assioma di separazione e ottenere l'*insieme* Z che conduce al paradosso.

1.2.9. *L'assioma di scelta.* L'assioma di scelta è probabilmente l'assioma più controverso fra gli assiomi che usualmente si assumono nella teoria assiomatica degli insiemi. Nonostante ciò (e nonostante alcuni aspetti della matematica che non ne fa uso siano molto interessanti), al giorno d'oggi è comunemente accettato dalla maggior parte dei matematici. È stato dimostrato da Gödel che, se la teoria costituita dai restanti assiomi è non contraddittoria, allora assumere anche l'assioma di scelta non porta a contraddizioni. Successivamente Paul Cohen ha dimostrato che, sotto le stesse ipotesi, non si ottengono contraddizioni nemmeno assumendo la negazione dell'assioma di scelta[18]. In un certo senso, quindi, accettare o meno questo assioma è una questione di gusto personale. Attualmente, nella comune pratica matematica, l'assioma è implicitamente accettato e, qualora si intenda non farne uso, questo viene di solito dichiarato esplicitamente, mentre il contrario non sempre avviene.

[18]Queste sono dimostrazioni di non contraddittorietà *relativa*, cioè si dimostra che se una certa teoria T è non contraddittoria, allora un'altra teoria T' è non contraddittoria. Una dimostrazione (non relativa) della non contraddittorietà di una teoria degli insiemi sufficientemente forte è impossibile (sotto alcune ipotesi molto naturali) a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel, per i quali si rimanda ad un testo di logica.

L'assioma è stato usato da molti matematici senza rendersene conto, o comunque senza enunciarlo esplicitamente, talvolta anche molto prima della sua esplicita formulazione. Anche matematici che si sono schierati dichiaratamente contro l'assioma, l'hanno a volte usato, quasi certamente a loro insaputa[19]. Enunciamo adesso l'assioma in una forma leggermente semplificata.

(Assioma di Scelta) Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, allora esiste un insieme S tale che $|A \cap S| = 1$, per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Quindi l'assioma di scelta ci permette di "scegliere" esattamente un elemento da ciascun insieme appartenente ad una famiglia, purché gli insiemi della famiglia siano a due a due disgiunti, e ovviamente non vuoti.

Precisiamo che ci sono casi in cui la scelta può essere effettuata senza necessità di un assioma aggiuntivo. Si considera generalmente ammissibile la scelta di un numero finito di elementi. Ma questo non è l'unico caso in cui non è necessario l'assioma di scelta. Per esempio, se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi e limitati inferiormente di $\mathbb{R}$ (naturalmente, non vuoti e a due a due disgiunti), allora $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{esiste } A \in \mathcal{F} \text{ tale che } x = \min A \}$ è un insieme che soddisfa la conclusione dell'assioma di scelta. In questo caso particolare non abbiamo bisogno dell'assioma di scelta per ottenere S: l'esistenza di S segue immediatamente dall'assioma di separazione!

Intuitivamente, tutte le volte che può essere stabilita una regola per scegliere un elemento ben preciso da ciascun A di $\mathcal{F}$, allora l'assioma di scelta non è necessario. Volendo essere più formali, quello che serve è una formula φ tale che per ogni $A \in \mathcal{F}$ esiste esattamente un elemento $a \in A$ tale che valga $\varphi(a)$. In questo caso l'assioma di separazione ci fornisce un "insieme di scelta" S dato da $\{ x \in \bigcup \mathcal{F} \mid \varphi(x) \}$.

Al di là di questioni "filosofiche"[20] e di metodo, l'asioma della scelta presenta una significativa differenza rispetto agli assiomi introdotti finora. A parte l'assioma di estensionaità, che caratterizza la natura degli insiemi, tutti gli altri assiomi ci forniscono insiemi definiti univocamente (sempre per estensionalità), mentre l'insieme fornito dall'assioma di scelta è in generale tutt'altro che unico.

Nella prossima sottosezione presentiamo una forma equivalente (particolarmente utile e intuitiva) dell'assioma di scelta.

1.2.10. *Prodotti infiniti.* Una *successione generalizzata (ad indici su un insieme I) e (ad elementi in un insieme $\mathcal{F}$)*, per brevità, una *sequenza* è una funzione $A : I \to \mathcal{F}$.

---

[19] A riguardo va comunque precisato che esistono varie versioni più deboli dell'assioma di scelta e alcuni di questi matematici, pur dichiarandosi contrari alla versione "completa" dell'assioma di scelta, hanno esplicitamente ammesso la possibilità di usare alcune di queste versioni più deboli. Questo fatto ha a volte portato a fraintendimenti del reale pensiero di questi matematici.

Il testo fondamentale sula storia dell'assioma di scelta è G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, ma esistono analisi storiche più recenti riguardo ad alcuni aspetti particolari.

[20] Le dimostrazioni che usano l'assioma della scelta non sono "costruttive" cioè non forniscono un esempio esplicito degli oggetti di cui si dimostra l'esistenza.

Spesso si scriverà A_i al posto di $A(i)$, e la stessa funzione A verrà indicata come $(A_i)_{i \in I}$. Osserviamo che questa notazione combacia con quella usuale per indicare le successioni (ad indici in $\mathbb{N}$). Formalmente, una successione è una funzione s da $\mathbb{N}$ verso un certo insieme; ma solitamente le successioni vengono indicate con $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ed s_n indica l'elemento $s(n)$ della successione.

Se $(A_i)_{i \in I}$ è una sequenza di insiemi, il *prodotto (cartesiano* o *diretto*) $\prod_{i \in I} A_i$ della sequenza $(A_i)_{i \in I}$ è definito da

$$\prod_{i \in I} A_i = \{a \mid a \text{ è una funzione da } I \text{ a } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ tale che } a(i) \in A_i, \text{ per ogni } i \in I\}$$

In parole, $\prod_{i \in I} A_i$ è l'insieme delle sequenze $(a_i)_{i \in I}$ tali che $a_i \in A_i$, per ogni $i \in I$ (come precisato sopra, $a(i)$ ed a_i sono due modi per indicare lo stesso elemento della sequenza).

Se tutti gli A_i sono uguali ad A, si scriverà A^I al posto di $\prod_{i \in I} A_i$, e si parlerà di *potenza* di A o più precisamente *potenza alla* I. In questo caso A^I è l'insieme di tutte le funzioni da I ad A.

Non è difficile dimostrare che l'assioma di scelta è equivalente al seguente principio.

(Assioma Moltiplicativo) Se $(A_i)_{i \in I}$ è una sequenza di insiemi non vuoti, allora il prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ è non vuoto.

Dunque l'assioma di scelta è equivalente alla richiesta che il prodotto di una sequenza di insiemi non vuoti sia esso stesso non vuoto.

Come ulteriore esempio (molto semplice!) di un caso in cui non c'è bisogno di particolari assiomi, supponiamo che $A_i = A$, per ogni $i \in I$. Allora, se A è non vuoto, anche A^I è non vuoto. Basta scegliere un qualunque $a \in A$. L'esistenza della funzione costante $\hat{a} : I \to A$ tale che $\hat{a}(i) = a$ per ogni $i \in I$ segue dagli altri assiomi.

Accenniamo alla dimostrazione che l'assioma della scelta è equivalente all'assioma moltiplicativo. Se vale l'assioma moltiplicativo e $\mathcal{F}$ è come nelle ipotesi dell'assioma di scelta, allora si può considerare il prodotto $\prod_{A \in \mathcal{F}} A$ (in altre parole, stiamo prendendo come successione generalizzata la funzione identica da $\mathcal{F}$ ad $\mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F}$ indicizza se stessa). Per l'assioma moltiplicativo esiste $f \in \prod_{A \in \mathcal{F}} A$, e se prendo come S l'immagine di f ho un insieme di scelta per $\mathcal{F}$.

Il viceversa è ovvio quando gli insiemi della sequenza $(A_i)_{i \in I}$ sono a due a due disgiunti: considero $f(i) = S \cap A_i$, dove S è dato dall'assioma di scelta. Ma posso sempre ricondurmi al caso precedente se al posto di A_i considero l'insieme $A_i^* = \{i\} \times A_i = \{\, (i, a) \mid a \in A_i \,\}$.

1.2.11. *Conseguenze dell'assioma di scelta**.* [da riorganizzare!]

Altre formulazioni equivalenti L'assioma di scelta è equivalente ad un altro principio importante in teoria degli insiemi, un principio introdotto da Cantor molto prima della formulazione esplicita dell'assioma di scelta. In effetti, Zermelo ha introdotto l'assioma di scelta proprio per tentare di dimostrare il principio introdotto da Cantor.

Principio del buon ordinamento. Ogni insieme può essere bene ordinato[21].

Come vedremo, l'assioma della scelta, nella forma del principio del buon ordinamento, ci permetterà di dare una definizione esplicita di cardinaltà di un insieme. Ogni classe di insiemi bene ordinati ha uno speciale "rappresentante", l'ordinale associato, e si può definire la cardinalità di un insieme X come l'ordinale più piccolo (che esiste) associato ad un possibile buon ordinamento di X.

L'assioma della scelta è chiaramente equivalente al seguente principio:

(I) se $f : A \to B$ è una funzione suriettiva, allora esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f$ (applico prima g poi f, cioè $(g \circ f)(a) = f(g(a))$) sia la funzione identità su B (in particolare, g risulta iniettiva).

Infatti, se $f : A \to B$, la relazione definita da $a \sim a'$ se $f(a) = f(a')$ induce una partizione di A alla quale si può applicare l'assioma di scelta. Viceversa, se $\mathcal{F}$ è come nell'enunciato dell'assioma di scelta, basta applicare (I) alla funzione $h : \bigcup \mathcal{F} \to A$ definita da $h(a) = A$, dove A è l'unico elemento di $\mathcal{F}$ tale che $a \in A$ (A è unico perchè gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti).

Si può provare a indebolire (I) chiedendo solo

(I$'$) se $f : A \to B$ è una funzione suriettiva, allora esiste una funzione iniettiva $g : B \to A$.

Ovviamente (I) $\Rightarrow$ (I$'$), ma sembra essere un problema ancora aperto se vale il viceversa, oppure se (I$'$) è strettamente più debole di (I). Questo problema è stato indicato come il più antico problema non ancora risolto in teoria degli insiemi.

https://karagila.org/2014/on-the-partition-principle/

Senza assumere l'assioma di scelta:

- unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili non necessariamente numerabile (anzi, addirittura $\mathbb{R}$ potrebbe essere unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili!) [ma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è sempre numerabile! Il problema non è costruire la biiezione fra $\bigcup_{i \in I} X_i$ ed $\mathbb{N}$, il problema è che non è scontato che si possano *scegliere* contemporaneamente biiezioni fra X_i ed $\mathbb{N}$.]

- possono esistere insiemi che non sono finiti, ma che sono finiti nel senso di Dedekind. Cioè può esistere un insieme X che non è finito, ma tale che non esiste una funzione iniettiva da $\mathbb{N}$ in X.

Con l'assioma di scelta (conseguenze paradossali):

- sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili

- paradosso di Banach Tarski

- esiste un gioco infinito tale che nessuno dei due giocatori ha una strategia vincente (gioco= deterministico, senza fattori casuali, a due persone; risultato solo vittoria o sconfitta; nel caso finito uno dei due ha sempre una strategia

[21] La definizione di buon ordine viene data in seguito.

vincente: basta analizzare tutte le possibilità, esempio: tris. In generale, si chiama strategia minimax sull'albero delle possibili mosse.)

(L'ipotesi che per tutti i giochi numerabili almeno un giocatore abbia una strategia vincente viene chiamato assioma di determinatezza (AD) - per quanto detto contraddice l'assioma di scelta - e ha trovato moltissime applicazioni, anche a problemi di analisi su numeri reali. Soprattutto, è stata utile per analizzare le conseguenze di certe proprietà *anche sotto l'ipotesi dell'assioma della scelta*: usando AD si possono costruire modelli con proprietà particolari, che poi possono essere modificati ottenendo modelli della teoria con l'assioma di scelta, e viceversa.)

1.2.12. *Cenni ad ulteriori assiomi**. Come abbiamo accennato all'inizio, l'elenco degli assiomi che abbiamo presentato non è del tutto completo.

L'assioma di rimpiazzamento. Per ottenere alcuni risultati è necessario considerare una forma più forte dell'assioma di separazione che, detto in maniera molto approssimativa, ci consenta di costruire certe famiglie $\{A_i \mid i \in I\}$ di insiemi la cui esistenza non seguirebbe dagli altri assiomi. Come già detto, la questione è talmente delicata che ha tratto in inganno illustri matematici.

Invece l'assioma di fondazione, che stiamo per introdurre, ha un numero minimo di applicazioni matematiche "pure", ed è utilizzato generalmente per motivi tecnici interni alla teoria degli insiemi. Ha comunque una forte motivazione di cui parleremo in seguito. Enunciamo l'assioma in una forma equivalente, quella che garantisce la posibilità di una "induzione insiemistica".

Assioma di fondazione, o di regolarità (formulazione equivalente, assumendo gli altri assiomi: induzione insiemistica). Se $\varphi(x)$ è una formula e $\forall y\ ((\forall x \in y\ \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(y))$, allora[22] $\forall y\ \varphi(y)$.

La teoria con tutti gli assiomi considerati finora viene detta teoria di Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta, abbreviata in ZFC (solo ZF, se non si assume l'assioma di scelta).

Altre letture. Un libro molto utile, apparentemente elementare ma in realtà decisamente denso, dove (a dispetto del titolo) si presenta la teoria degli insiemi in maniera assiomatica anche se non formalizzata è Paul Halmos, *Naive Set Theory*, varie edizioni, trad. it., *Teoria elementare degli insiemi*, varie ristampe.

Utile materiale in lingua italiana si può trovare ai seguenti indirizzi:

(Alessandro Andretta)
http://www.logicatorino.altervista.org/materiale/Elementi.pdf

(Mauro Di Nasso) http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/dinasso/eti-2014.html

(Piero Plazzi) http://campus.unibo.it/74334/1/Insiemi.pdf

[22] Abbiamo espresso l'assioma parzialmente a parole per renderlo più intuitivo. Formalmente, lo schema di assiomi è costituito da tutte le formule $(\forall y\ ((\forall x \in y\ \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(y))) \Rightarrow \forall y\ \varphi(y)$, al variare della formula φ.

Un'introduzione interessante e molto dettagliata dal punto di vista storico si trova in

https://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-la-teoria-degli-insiemi_(Storia-della-Scienza)/

Il manuale ormai classico riguardante la teoria degli insiemi è Thomas Jech, *Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded*, 2002, successive ristampe con correzioni.

Un manuale aggiornato agli sviluppi più recenti è Matthew Foreman, Akihiro Kanamori (Editors), *Handbook of Set Theory*, 2010, tre volumi.

Sull'assioma di scelta e sue forme equivalenti, si può consultare Herman Rubin, Jean E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice.* 1985

Inoltre Howard, Paul; Rubin, Jean E. *Consequences of the axiom of choice, 1998* presenta un elenco di enunciati che seguono dall'assioma di scelta (cioè che non seguono dagli assiomi senza usare l'assioma di scelta) ma che, generalmente, sono più deboli (cioè non implicano la forma "completa" dell'assioma di scelta).

Come testo di base riguardante la logica matematica consigliamo, fra le tante possibilità, il libro di Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, varie edizioni, trad. it. *Introduzione alla Logica Matematica.*

Di sicuro interesse per lo studente che voglia approfondire le questioni fondazionali è il libro di Gabriele Lolli, *Filosofia della matematica*, 2002. Sono molto utili anche le pagine della Stanford Encyclopedia of Philosophy, giusto per fare un esempio:

https://plato.stanford.edu/entries/set-theory/

Paolo Lipparini

Dipartimento di Matematica, Viale della Ricerca Insiemistica, Università di Roma "Tor Vergata", I-00133 ROME ITALY