

Dimostrazione della Proposizione 1.60 delle note (numerazione della versione del 3 dicembre)

Poiché l'intersezione di un qualunque insieme di relazioni di equivalenza su un insieme A è ancora una relazione di equivalenza, si ha che l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza su A è un reticolo, analogamente a quanto osservato dopo la Proposizione 1.20 e dopo la Proposizione 1.42.

Nella seguente proposizione diamo una descrizione esplicita di $\alpha \vee \beta$ nel reticolo delle relazioni di equivalenza su A (cf. l'osservazione 1.47).

Proposizione 1. *Se α e β sono due relazioni d'equivalenza su un insieme A , allora esiste la più piccola relazione d'equivalenza $\alpha \vee \beta$ che contiene sia α che β .*

$$\text{Si ha: } (*) \alpha \vee \beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$$

Dimostrazione. Se una relazione d'equivalenza γ contiene sia α che β , allora necessariamente γ contiene l'insieme descritto da (*), poiché γ deve essere transitiva.

Quindi basta dimostrare che l'insieme descritto da (*) è effettivamente una relazione d'equivalenza. La riflessività è ovvia, poiché sia α che β sono riflessive. La transitività è banale. Per dimostrare la simmetria, siccome α e β sono simmetriche, basta osservare che $\underbrace{\beta \circ \alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n \text{ fattori}} \subseteq \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$, ma questo è vero, poiché α è riflessiva.

Problema 2. Sotto quali ipotesi su α e β l'insieme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$

è una relazione d'equivalenza?

È davvero necessario assumere che α e β siano relazioni d'equivalenza?

Proposizione 3. *Se α e β sono congruenze di un'algebra $\mathbf{A}$, allora nel reticolo delle congruenze di $\mathbf{A}$ si ha $\alpha \vee \beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1, l'insieme $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$ è una relazione d'equivalenza, quindi basta dimostrare che X è compatibile.

Per esempio, la compatibilità segue facilmente applicando il Lemma 1.59.

Oppure si può osservare, iterando il Lemma 1.57, che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}}$ è una relazione compatibile. Ma un'unione crescente di relazioni compatibili è ancora compatibile (la dimostrazione è sostanzialmente quella della successiva Proposizione 1.63). Ed effettivamente $\underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{n+1 \text{ fattori}} \subseteq \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \dots}_{m+1 \text{ fattori}}$, se $n \leq m$ (perchè?), quindi si tratta di un'unione crescente.

Corollario 4. *Se $\mathbf{A}$ è un'algebra, il reticolo delle congruenze di $\mathbf{A}$ è un sottoreticolo del reticolo delle relazioni d'equivalenze su A (cioè le operazioni $\wedge$ e $\vee$ coincidono, quando definite).*

Problema 5. Come si generalizzano i risultati precedenti nel caso di 3 relazioni (o congruenze) o, in generale, di un numero finito di relazioni?

Si possono generalizzare questi risultati nel caso di un numero infinito di relazioni? (la risposta è sì, vedi Bergman, Prop 2.16 e Cor 2.19, ma sarebbe un esercizio utile provarci da soli.)