ULTRAFILTRI E COMPATTEZZA DI SPAZI TOPOLOGICI

PAOLO LIPPARINI

(versione preliminare, potrebbe contenere errori)

1. Introduzione

Nella prossima sezione faremo uso degli ultrafiltri per dimostrare un classico teorema di Tychonoff, che afferma che un prodotto qualunque di spazi topologici compatti è ancora compatto (probabilmente il lettore avrà visto una dimostrazione nel caso di prodotti finiti).

Nella sezione successiva gli ultrafiltri verranno usati per studiare proprietà più deboli della compattezza "completa".

Nell'ultima sezione si accenna al fatto che il Teorema di Compattezza in teoria dei modelli è equivalente all'assserzione della compattezza di certi spazi topologici. Il Teorema di Compattezza diventa quindi una conseguenza dei risultati della prima sezione, usando il Teorema di Łoś.

Tutti i risultati sono ampiamente noti, ma alcune dimostrazioni sono diverse da quelle usuali. I prerequisiti sono una buona familiarità coi metodi matematici (a livello, diciamo, di uno studente del secondo anno) e una buona conoscenza della topologia. È necessario conoscere la definizione di ultrafiltro, ed alcune proprietà di base. L'ultima sezione richiede alcune nozioni di base di teoria dei modelli. Sia per queste, che per la definizione di ultrafiltro è sufficiente una piccola parte del libro di Chang e Keisler [CK].

2. Compattezza

Definizione 2.1. Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

La seguente definizione si è rivelata di importanza fondamentale nello studio delle proprietà di compattezza soddisfatte nei prodotti di spazi topologici.

Definizione 2.2. Sia D un filtro su un insieme I, X uno spazio topologico, x un elemento di X e $(x_i)_{i \in I}$ una sequenza di elementi di X (per *sequenza*, in questo senso, si intende, formalmente, una funzione f da I a X, e, per $i \in I$, si scrive x_i per $f(i)$).

Si dice che $(x_i)_{i\in I}$ *D-converge ad x* se, per ogni intorno U di x in X, l'insieme $\{i \in I \mid x_i \in U\}$ appartiene a D.

Naturalmente, se si dice semplicemente che $(x_i)_{i\in I}$ *D-converge*, si intende che esiste un punto x in X tale che $(x_i)_{i\in I}$ D-converge ad x.

Esempio 2.3. Se, nella definizione precedente, $I = N$ (l'insieme dei numeri naturali) e D è il filtro dei sottoinsiemi cofiniti di N (il filtro di Fréchet), allora la successione $(x_i)_{i\in N}$ *D-converge ad x* se e solo se $(x_i)_{i\in N}$ converge ad x nel senso classico.

Il prossimo esempio mostra che la D-convergenza si comporta in maniera molto diversa, a seconda del caso che D sia un ultrafiltro oppure no. Nel seguito, supporremo sempre che D è un filtro sull'insieme I.

Esempio 2.4. Sia X uno spazio topologico discreto con 2 elementi.

Se D non è un ultrafiltro (cioé non è massimale), allora esiste una sequenza $(x_i)_{i\in I}$ di elementi di X che non D-converge in X.

Se D è un ultrafiltro, allora ogni sequenza $(x_i)_{i\in I}$ di elementi di X D-converge in X.

Esistono quindi spazi tali che, per ogni ultrafiltro D e per ogni sequenza ad indici in I, la sequenza D-converge. Vedremo infatti che uno spazio topologico X soddisfa alla proprietà precedente se e solo X è compatto. È comunque interessante studiare la precedente proprietà limitatamente ad un solo ultrafiltro.

Definizione 2.5. Sia X uno spazio topologico e sia D un ultrafiltro su I. Si dice che X è *D-compatto* se ogni sequenza $(x_i)_{i\in I}$ di elementi di X D-converge in X.

Esempio 2.6. (facoltativo, richiede una minima conoscenza degli ordinali) Sia X lo spazio ω_1, dove ω_1 è il primo ordinale non numerabile, e la topologia ha come base gli intervalli aperti, inclusi gli intervalli del tipo $[0, \alpha)$. Allora X è D-compatto, per ogni ultrafiltro D su N.

Dimostrazione. Sia D un ultrafiltro su N e sia $(x_i)_{i\in N}$ una sequenza di elementi di X. Sia $\alpha = \inf\{\beta < \omega_1 \mid \{i \in N \mid x_i < \beta\} \in D\}$. Un tale α esiste, perché l'insieme di cui prendiamo il minimo è non vuoto, siccome una successione numerabile è limitata in ω_1. Si può dimostrare che $(x_i)_{i\in N}$ D-converge ad α.

Chi abbia un minimo di familiarità con la teoria degli ordinali osserverà che l'unica ipotesi che abbiamo usato su ω_1 è che ha cofinalità $> \omega$. Dunque il risultato vale per ogni ordinale di cofinalità $> \omega$. Anzi (ma dimostrare questa generalizzazione è un po' più lungo), il risultato vale per qualunque spazio topologico L linearmente ordinato tale che ogni successione crescente (ad indici in N) ha un estremo superiore in L e tale che, simmetricamente, ogni successione decrescente ha un estremo inferiore. $\square$

L'importanza della nozione di D-compattezza è dovuta, per la maggior parte, al seguente risultato che, nonostante la semplice dimostrazione, merita certamente il titolo di Teorema.

Teorema 2.7. *Sia D un filtro. Ogni prodotto di spazi topologici D-compatti è ancora D-compatto.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 2.8. *Uno spazio topologico è compatto se e solo se è D-compatto per ogni ultrafiltro D.*

Dimostrazione. Avvertiamo innanzitutto che la dimostrazione farà un uso insistente dell'assioma di scelta.

Sia X compatto, e sia D un ultrafiltro su I e $(x_i)_{i \in I}$ una sequenza di elementi di X. Dobbiamo dimostrare che $(x_i)_{i \in I}$ D-converge a qualche punto di X. Supponiamo il contrario. Allora, per ogni $x \in X$, esiste un intorno U_x tale che $\{i \in I \mid x_i \in U_x\} \notin D$. Per ogni $x \in X$, usando l'assioma di scelta, fissiamo un siffatto intorno U_x. Allora $(U_x)_{x \in X}$ è un ricoprimento di X e, per compattezza, ammette un sottoricoprimento finito $(U_y)_{y \in F}$, dove F è finito. Per ogni $y \in F$, sia $Z_y = \{i \in I \mid x_i \in U_y\}$. Per costruzione, $Z_y \notin D$, per ogni $y \in F$. D'altro canto, siccome $(U_y)_{y \in F}$ è un ricoprimento di X, per ogni $i \in I$ esiste un $y \in F$ tale che $x_i \in U_y$, quindi l'unione (finita) degli Z_y è tutto I, quindi sta in D. Ma questo contraddice l'assunzione che D sia un ultrafiltro, perchè un'unione finita di elementi non in D non può appartenere a D.

Dimostriamo ora l'altra direzione. Dobbiamo dimostrare che se X è D-compatto per ogni ultrafiltro D, allora X è compatto. Sia $(O_j)_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X. Sia $I = [J]^{<\omega}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di J. Per ogni $j \in J$, sia $j^{\uparrow} = \{i \in I \mid j \in i\}$. La famiglia $\{j^{\uparrow} \mid j \in J\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita (verificare!), quindi può essere estesa ad un ultrafiltro D su I. Supponiamo per assurdo che $(O_j)_{j \in J}$ non abbia nessun sottoricoprimento finito. Allora, per ogni $i \in I$, $\bigcup_{j \in i} O_j \subset X$ (inclusione propria; ricordiamo che ogni $i \in I$ è un sottoinsieme *finito* di J). Quindi, per ogni $i \in I$, possiamo scegliere un $x_i \in X$ tale che $x_i \notin \bigcup_{j \in i} O_j$. Siccome X è D-compatto, la sequenza $(x_i)_{i \in I}$ D-converge a qualche punto $x \in X$. Siccome $(O_j)_{j \in J}$ è un ricoprimento di X, $x \in O_{\bar{\jmath}}$, per qualche $\bar{\jmath} \in J$. Siccome $O_{\bar{\jmath}}$ è un intorno di x, per la definizione di D-convergenza, $\{i \in I \mid x_i \in O_{\bar{\jmath}}\} \in D$. Ma, per la costruzione di D, abbiamo che $\bar{\jmath}^{\uparrow} \in D$. Inoltre, per il modo in cui sono stati scelti gli x_i, abbiamo che, se $\bar{\jmath} \in i$, allora $x_i \notin O_{\bar{\jmath}}$. Dunque $\{i \in I \mid x_i \notin O_{\bar{\jmath}}\} \supseteq \bar{\jmath}^{\uparrow} \in D$, contraddizione, poiché $\{i \in I \mid x_i \notin O_{\bar{\jmath}}\}$ è il complementare di $\{i \in I \mid x_i \in O_{\bar{\jmath}}\}$. □

Teorema 2.9. ***(Teorema di Tychonoff)*** *Un prodotto di spazi topologici compatti è compatto.*

Dimostrazione. Immediata dai Teoremi 2.8 e 2.7. □

Per alcuni riferimenti storici sul Teorema di Tychonoff si può consultare W. Comfort e S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 211, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1974). Il libro è un riferimento standard per quello che riguarda ultrafiltri e applicazioni topologiche. Maggiori dettagli sulla storia del Teorema di Tychonoff e, più in generale, sulla storia della topologia si possono trovare in C. E. Aull e R. Lowen (a cura di), *Handbook of the History of General Topology*, vari volumi. La definizione di ultrafiltro è attribuita ad una comunicazione di F. Riesz in Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908. La teoria della convergenza rispetto ad un filtro su I è classica, limitatamente al caso in cui $X = I$. Si veda ad esempio la sezione a-5, *Convergence*, di S. Dolecki e T. Nogura, in K.P. Hart, J.-I. Nagata and J.E. Vaughan (a cura di) *Encyclopedia of General Topology*, 2004. Il primo lavoro di cui sono a conoscenza in cui appare la nozione di convergenza rispetto ad un filtro su un insieme qualunque è G. Choquet, *Sur les notions de filtre et de grille*, C. R. Acad. Sci., Paris 224, 171–173, 1947. Al riguardo si veda anche M. Katětov, *Products of filters*, Comment. Math. Univ. Carolin. 9, 173–189, 1968, e i riferimenti ivi citati. Nel caso di un ultrafiltro su N, la nozione di D-compattezza e il Teorema 2.7 sono dovuti ad A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. 66, 185–193, 1969/1970. Il Teorema 2.8 sembra essere stato notato per la prima volta da V. Saks, *Ultrafilter invariants in topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 241, 79–97, 1978. Saks usa una caratterizzazione della compattezza per mezzo dell'esistenza di "punti di accumulazione completi". Vedi il Teorema 2.9 nell'articolo di Saks. È dovuta a Saks anche l'osservazione che il Teorema di Tychonoff è una conseguenza immediata di 2.8.

La dimostrazione del Teorema 2.8 che abbiamo presentato è sostanzialmente un caso particolare di risultati di X. Caicedo, *The Abstract Compactness Theorem Revisited*, in A. Cantini e altri (a cura di), *Logic and Foundations of Mathematics*, 131–141, 1999 [Ca].

3. Compattezza numerabile

Definizione 3.1. Uno spazio topologico si dice *numerabilmente compatto* (talvolta *contabilmente compatto, "countably compact"* in inglese) se ogni ricoprimento aperto *numerabile* ammette un sottoricoprimento finito.

Un ultrafiltro D su un insieme I si dice *uniforme* se ogni elemento di D ha cardinalità $|I|$.

Teorema 3.2. *Uno spazio topologico X è numerabilmente compatto se e solo se, per ogni successione $(x_i)_{i\in N}$ di elementi di X, esiste un ultrafiltro D uniforme su N tale che la successione D-converge (in generale, l'ultrafiltro dipende dalla successione).*

Suggerimenti per la Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X sia numerabilmente compatto ma che esista una successione $(x_i)_{i\in N}$ di elementi di X per cui non esiste un ultrafiltro che sodisfa alle proprietà richieste. Allora, ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U_x tale che $\{i \in N \mid x_i \in U_x\}$ è finito (altrimenti esisterebbe il D cercato, verificare!). Per ogni $x \in X$ si scelga un intorno U_x come sopra, e sia $n(x) = \sup\{i \in N \mid x_i \in U_x\}$. Verificare che, se si pone $O_m = \bigcup_{x\in X, n(x)=m} U_x$, allora $(O_m)_{m\in N}$ è un controesempio alla compattezza numerabile di X.

Per l'altra direzione, supponiamo per assurdo che per ogni successione $(x_i)_{i\in N}$ esista un ultrafiltro come richiesto, ma che X non sia numerabilmente compatto. Sia quindi $(O_n)_{n\in N}$ un ricoprimento che non ha sottoricoprimenti finiti. Dunque, per ogni $n \in N$, possiamo scegliere $x_n \notin O_0 \cup O_1 \cup \dots \cup O_n$. Per ipotesi, esiste un ultrafiltro D uniforme su N tale che la successione $(x_n)_{n\in N}$ D-converge ad un certo $x \in X$. Usando questo x si puo' ottenere una contraddizione (verificare!). □

Il Teorema di Tychonoff non vale per spazi numerabilmente compatti; addirittura, si può dare l'esempio di due spazi numerabilmente compatti il cui prodotto non è numerabilmente compatto. Vedi, ad esempio, [V].

Esercizio 3.3. Trovare (facendo uso del risultato appena citato) uno spazio X numerabilmente compatto tale che X^2 non è numerabilmente compatto.

Considerando i controesempi appena menzionati, i seguenti teoremi sono abbastanza sorprendenti.

Teorema 3.4. *Per un qualsiasi spazio topologico X, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *Ogni potenza X^A (A è un insieme qualunque) di X è numerabilmente compatta.*
(2) $X^{2^{2^N}}$ *è numerabilmente compatto.*
(3) X *è D-compatto, per qualche ultrafiltro D uniforme su N.*

Teorema 3.5. *Un prodotto $\prod_{a \in A} X_a$ di spazi topologici (non vuoti) è numerabilmente compatto se e solo se ogni sottoprodotto $\prod_{a \in B} X_a$ con $|B| \leqslant 2^{2^N}$ è numerabilmente compatto (*sottoprodotto *significa semplicemente che $B \subseteq A$, cioé che prendiamo il prodotto di alcuni fra gli X_a—ma la possibiltà $B = A$ è ammessa).*

È una questione di convenzione se l'insieme vuoto debba essere o no considerato uno spazio topologico. Comunque, perchè è necessario escludere gli spazi vuoti nel teorema precedente?

Suggerimento per le dimostrazioni. Usare il fatto che ci sono (al massimo) 2^{2^N} ultrafiltri su N, insieme alla seguente facile generalizzazione del Teorema 2.7. I dettagli si possono trovare in [GS] e [Co].

Proposition 3.6. *Sia D un ultrafiltro, $\prod_{a \in A} X_a$ un prodotto di spazi topologici e x un elemento di $\prod_{a \in A} X_a$.*

Una sequenza di elementi di $\prod_{a \in A} X_a$ D-converge ad $x \in \prod_{a \in A} X_a$ se e solo se ogni componente della sequenza D-converge alla corrispondente componente di x.

4. Compattezza e teoria dei modelli

Tutti gli enunciati, teorie etc. nella presente sezione sono intesi nel senso della logica del primo ordine.

Consideriamo la classe $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ di tutti i modelli per un dato linguaggio $\mathcal{L}$ (il linguaggio sarà fissato per tutta la sezione). Per ogni enunciato φ del linguaggio, consideriamo la sottoclasse dei modelli in $\mathcal{K}$ che soddisfano φ. La collezione di queste sottoclassi costituisce la base per una topologia su $\mathcal{K}$ (gli apparenti problemi di teoria degli insiemi che sorgono con il considerare una collezione di classi si possono risolvere senza troppe difficoltà).

Verificare che C è un chiuso di $\mathcal{K}$ se e solo se esiste una teoria T tale che C è la classe di tutti i modelli di T. Quindi il Teorema di Compattezza equivale ad affermare che, per ogni linguaggio $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ è compatto in senso topologico.

Per dimostrare la compattezza di $\mathcal{K}$, possiamo dunque usare il Teorema 2.8.

Teorema 4.1. *Se $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ è una sequenza di modelli per il linguaggio $\mathcal{L}$ e D è un ultrafiltro su I, allora esiste un modello $\mathfrak{A}$ per $\mathcal{L}$ tale che*

$(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ *D-converge ad* $\mathfrak{A}$*, relativamente alla topologia precedentemente introdotta su* $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$.

Corollario 4.2. *Il Teorema di Compattezza per la logica del primo ordine.*

Ulteriori dettagli e importanti generalizzazioni si possono trovare nel lavoro di Caicedo [Ca].

Riferimenti bibliografici

[Ca] X. Caicedo, The Abstract Compactness Theorem Revisited, In A. Cantini et al. (Eds.), Logic and Foundations of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 1999, 131–141.

[CK] C. C. Chang e J. Keisler, *Model theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73, third edition (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990).

[Co] W. W. Comfort, Review of [GS], MR 52 #1633, 1976.

[GS] J. Ginsburg e V. Saks, Some applications of ultrafilters in topology, Pacific J. Math., 1975, 57, 403–418.

[V] J.E. Vaughan, *Countably compact and sequentially compact spaces* Chapter 12 in Handbook of Set Theoretic Topology (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds.), 569–602

Ultradipartimento di Matematica, Viale della Ricerca Scientifica, II Università di Roma (Tor Vergata), I-00133 ROME ITALY

URL: `http://www.mat.uniroma2.it/~lipparin`