Esercizio 1. Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

a) Sia T un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Dire se, in generale, $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ e' una base di $\mathbb{R}^3$.

Se sì, dimostrarlo, se no dare un esempio in cui sia vero e uno in cui sia falso.

IN GENERALE, NO.
L'ESEMPIO PIÙ SEMPLICE SI OTTIENE PRENDENDO L'APPLICAZIONE NULLA $T(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in R^3$
UN ESEMPIO IN CUI SIA VERO SI PUÒ OTTENERE PRENDENDO T L'APPLICAZIONE IDENTICA $T(\bar{v}) = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in R^3$
NATURALMENTE, QUESTI SONO SOLO ALCUNI TRA I TANTI ESEMPI POSSIBILI.

b) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che rappresenta la applicazione lineare T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ rispetto alle basi $B_1 = \{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $T(aw_1 + bw_2)$.

In particolare se $B_1 = \{(0,1), (1,3)\}$ e $B_2 = \{(-2,1,0), (3,1,-4), (0,-2,3)\}$ calcolare $T(1,3)$.

$$T(aw_1 + bw_2) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2a+3b)v_1 + (a+4b)v_2 + (5a+b)v_3$$

QUINDI $T(1,3) = T\big(0(0,1) + 1(1,3)\big) =$
$= 3(-2,1,0) + 4(3,1,-4) + (0,-2,3) = (6,5,-13)$

$t = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ d-a \\ \dots \\ b-a+c-\frac{1}{2}d \end{array}$$

eq. cart. $-x_1 + x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0$

eq. param. $V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

c) Calcolare, al variare di t in $\mathbf{R}$ equazioni cartesiane e parametriche per:

$V = Span\{(1,1,t,1), (0,t,0,1), (0,0,t,1), (0,2t,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 & 2t \\ t & 0 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 2t \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ b-a \\ c-ta \\ d-a \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 2t \\ 0 & 0 & t & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ d-a \\ b-a \\ c-ta \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 2t \\ 0 & 0 & t & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ d-a \\ b-a-td+ta \\ c-ta \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -2t \\ 0 & 0 & 0 & 1-2t \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ d-a \\ (b-a)-td+ta \\ b-a+c-td \end{array}$$

$t = 0$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ d-a \\ b-a \\ \dots \end{array}$$

eq. cart $x_2 - x_1 = 0$

eq. par. $V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_4$

$t = 0$

$t = \frac{1}{2}$

quindi per $t \neq 0$, $t \neq \frac{1}{2}$

$V = \mathbb{R}^4$

eq. cart $0 = 0$

eq. param.

$x_1 = x_1$

$x_2 = x_2$

$x_3 = x_3$

$x_4 = x_4$

d) (i) **Determinare in $\mathbf{R}^3$** una retta r_1 che passa per il punto P di coordinate $(-1, 2, 3)$ ed è perpendicolare al piano π di equazioni $-2x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Determinare l'intersezione fra r_1 e π.

(ii) Determinare una retta r_2 che passa per il punto P di coordinate $(-1, 2, 3)$ ed è parallela alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -2 + t'$

$x_2 = t'$

$x_3 = -1 - 2t'$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(iii) Determinare la posizione relativa di r_1 e r_2.

O(d) del secondo appello, simile agli esercizi 4(c) del primo appello e 0(d)

cambia solo qualche numero

r_p
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2t \\ 2+t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

$-2(-1-2t) + 2+t - 3 + t = 1 \Rightarrow$

$2 + 4t + 2 + t - 3 + t = 1$

$\Rightarrow 6t = 1 + 3 - 4$

$6t = 0 \quad t = 0$

i.e. $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$

$q \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}\,; \qquad \text{SI}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \text{ esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_1 = t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 3 + t\}\,; \qquad \text{NO}$$

$$W = Span\,((2, 1, 1), (0, 1, -1), (2, 1, 1)). \qquad \text{SI}$$

a) Quali fra U, V e W sono sosttospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$?

b) Determinare basi per U e W.

c) Determinare equazioni per W e per $U \cap W$.

d) Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

e) Cosa rappresentano geometricamente U, V, W, $U \cap W$ e $U + W$?

SIMILE ALL'ESERCIZIO 1 DEL 2° APPELLO, CAMBIA SOLO QUALCHE NUMERO

c) eq. PER W:

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Esercizio 3. (a) Dire per quali valori del parametro k in $\mathbf{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k+4 \\ -1 & 3 & k+4 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di k in $\mathbf{R}$, la matrice A_k sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare L da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$.

Determinare, al variare di k in $\mathbf{R}$, la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di L che per il nucleo di L.

(c) Sia k_0 il valore di k per cui A_k risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare k_0 determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per A_{k_0}.

È possibile diagonalizzare A_{k_0} mediante una matrice ortogonale?

SIMILE ALL'ESERCIZIO 2 DEL SECONDO APPELLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k+4 \\ -1 & 3 & k+4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & k+4 \\ 3 & k+4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & k+4 \\ -1 & k+4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(k+4) - 3(k+4) - (k+4)(-1)$$

$$= k+4 \qquad k = -4.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{-3}{k+4} & \frac{4}{k+4} & -\frac{3}{k+4} \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI

$\lambda = 3, 1, 0$