Facoltà di Scienze

Appello del 15 febbraio 2010

COGNOME NOME CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

0.

1.

2.

Esercizio 0. Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

a) Discutere e risolvere il seguente sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \alpha(\alpha+2)y = \alpha+2 \end{cases}$$

b) Calcolare, al variare di a in $\mathbf{R}$ il determinante della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^5 & -1+a^5 & -3+a^5 \\ a^{17} & a^{17} & 2a^{17} \end{pmatrix}$$

c) Calcolare il rango della seguente matrice.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) (i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ una retta r_1 che passa per il punto P di coordinate $(2, -1, 3)$ ed è perpendicolare al piano π di equazioni $x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$. Determinare l'intersezione fra r_1 e π.

(ii) Determinare una retta r_2 che passa per il punto P di coordinate $(2, -1, 3)$ ed è parallela alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(iii) Determinare la posizione relativa di r_1 e r_2.

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}\,;$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \text{ esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_1 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 1 + t\}\,;$$

$$W = Span\,((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)).$$

a) Quali fra U, V e W sono sosttospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$?

b) Determinare basi per U e W.

c) Determinare equazioni per W e per $U \cap W$.

d) Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

e) Cosa rappresentano geometricamente U, V, W, $U \cap W$ e $U + W$?

Esercizio 2. (a) Dire per quali valori del parametro k in $\mathbf{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 3 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di k in $\mathbf{R}$, la matrice A_k sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare L da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$.

Determinare, al variare di k in $\mathbf{R}$, la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di L che per il nucleo di L.

(c) Sia k_0 il valore di k per cui A_k risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare k_0 determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per A_{k_0}.

È possibile diagonalizzare A_{k_0} mediante una matrice ortogonale?