Facoltà di Scienze

Appello del 23 settembre 2010

COGNOME NOME CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

0.

1.

2.

Esercizio 0. Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

a) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori $v_1 = (5,0,0,0)$ e $v_2 = (0,0,5,0)$? Se sì, determinare almeno due basi di $\mathbb{R}^4$ che contengono v_1 e v_2.

   Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori $w_1 = (1,2,4,8)$ e $w_2 = (-1,-2,-4,-8)$? Se sì, determinare almeno due basi di $\mathbb{R}^4$ che contengono w_1 e w_2.

b) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici. Che relazione esiste fra questi determinanti? Spiegare il motivo di questa relazione.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) (i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ una retta r_1 che passa per il punto P di coordinate $(1, 3, -3)$ ed è perpendicolare al piano π di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Determinare l'intersezione fra r_1 e π.

(ii) Determinare una retta r_2 che passa per il punto P di coordinate $(1, 3, -3)$ ed è perpendicolare ed incidente alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(iii) Determinare la posizione relativa di r_1 e r_2.

d) Sia L_1 l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^2$ che ha per matrice associata, rispetto alle basi canoniche:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia L_2 l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ che ha per matrice associata, rispetto alle basi canoniche:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se è possibile calcolare $L_1 \circ L_2$ e, in caso affermativo, determinare la matrice associata a $L_1 \circ L_2$ rispetto alle basi canoniche, specificando esplicitamente quale è lo spazio di partenza, e quale è lo spazio di arrivo.

Dire se è possibile calcolare $L_2 \circ L_1$, e, in caso affermativo, determinare la matrice associata a $L_2 \circ L_1$ rispetto alle basi canoniche, specificando esplicitamente quale è lo spazio di partenza, e quale è lo spazio di arrivo.

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato da $(2,0,0,2), (1,1,1,3), (2,1,-1,4)$ e il sottospazio

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Determinare basi per U, W, $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 2. Determinare gli autovalori della seguente matrice, e determinare la loro molteplicità algebrica.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinare, per ciascun autospazio, la dimensione, una base e un insieme di equazioni.

Dire se la matrice è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare la forma diagonale e una matrice diagonalizzante.

Dire se la matrice è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale (non si richiede di trovare l'eventuale matrice diagonalizzante ortogonale).