p. 1

**Esercizio 0.** Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

3

a) Discutere e risolvere il seguente sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \alpha(\alpha+2)y = \alpha+2 \end{cases}$$

~~Scriviamo la matrice con i coefficienti del sistema~~

La matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha(\alpha+2) & \alpha+2 \end{array}\right)$ è quella associata al sistema

Se $\alpha = -2$ $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, pertanto lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, $y$ è un parametro e $x = 1-y$

Se $\alpha \neq -2$, Se $\alpha = 0$ $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, pertanto il sistema per il teorema di Rouché-Capelli è incompatibile

Se $\alpha \neq -2$, Se $\alpha \neq 0$ $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha(\alpha+2) & \alpha+2 \end{array}\right)$, pertanto lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0, geometricamente si tratta di un punto $y = \frac{1}{\alpha}$ $x = 1 - \frac{1}{\alpha}$

3

b) Calcolare, al variare di $a$ in $\mathbf{R}$ il determinante della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^5 & -1+a^5 & -3+a^5 \\ a^{17} & a^{17} & 2a^{17} \end{pmatrix}$$

EFFETTUANDO OPERAZIONI ELEMENTARI IL DET NON CAMBIA, QUINDI

$$\text{DET } A = \text{DET} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a^{17} \end{pmatrix} = -a^{17}$$

$R_2 \to R_2 - a^5 R_1$

$R_3 \to R_3 - a^{17} R_1$

c) Calcolare il rango della seguente matrice.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

attraverso l'eliminazione gaussiana

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_5 \to R_5 - R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - 5R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & -4 \\ 0 & 8 & 16 & 30 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftrightarrow R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice è quindi ridotta a scala, e ha 2 pivot, pertanto il suo rango è pari a 2

d) (i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ una retta $r_1$ che passa per il punto $P$ di coordinate $(2, -1, 3)$ ed è perpendicolare al piano $\pi$ di equazioni $x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$. Determinare l'intersezione fra $r_1$ e $\pi$.

(ii) Determinare una retta $r_2$ che passa per il punto $P$ di coordinate $(2, -1, 3)$ ed è parallela alla retta $s$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(iii) Determinare la posizione relativa di $r_1$ e $r_2$.

i) Poiché $r_1 \perp \pi$, il vettore ~~[illegible]~~ di $\pi$ sarà proporzionale a quello di $r$. Dall'equazione di $\pi$ vediamo che il suo vettore ~~[illegible]~~ è $(1, -2, -1)$. ~~[illegible]~~ Il vettore direzione di $r_1$ sarà dunque $d(1, -2, -1)$ e come $d$ scegliamo ~~[illegible]~~ 1
L'equazione GENERICA DI UNA RETTA PERPENDICOLARE A $\pi$ ~~[illegible]~~ in forma parametrica sarà dunque

$$\begin{cases} x_1 = a + t \\ x_2 = b - 2t \\ x_3 = c - t \end{cases} \quad \text{imponendo il passaggio per } P \text{ si ha } r_1 = \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -1 - 2t \\ x_3 = 3 - t \end{cases}$$

ii) Dato che $r_2 \parallel s$, i loro vettori direzione ~~sono~~ sono proporzionali. Per trovare il vettore direzione di s mettiamo le sue equazioni in forma parametrica

$x_1 = t \qquad t - x_2 = 2 \qquad x_2 = -2 + t \qquad 2t + x_3 = -1 \qquad x_3 = -1 - 2t$

$$s = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2 + t \\ x_3 = -1 - 2t \end{cases}$$

Il vettore direzione di s è $(1, 1, -2)$, e il vettore direzione di $r_2$ è $\beta(1, 1, -2)$

Scegliendo $\beta = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = a + t \\ x_2 = b + t \\ x_3 = c - 2t \end{cases}$$

Imponendo il passaggio per P si ha $r_2 = \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -1 + t \\ x_3 = 3 - 2t \end{cases}$

iii) Le equazioni ~~[illegible]~~ delle rette sono

$$r_1 = \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -1 - 2t \\ x_3 = 3 - t \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -1 + t \\ x_3 = 3 - 2t \end{cases}$$

Poiché passano entrambe per il punto $P = (2, -1, 3)$ si possono verificare solo 2 casi: sono incidenti oppure coincidenti.
Poiché i vettori direzione di $r_1$ e $r_2$ non sono proporzionali, $r_1$ e $r_2$ non sono coincidenti, pertanto esse sono incidenti.
Possiamo osservare anche che il prodotto scalare dei vettori direzione è diverso da 0, pertanto le rette non sono perpendicolari.

P. 3

P. 4

**Esercizio 1** Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\};$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \text{ esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_1 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 1 + t\};$$

$$W = Span((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)).$$

a) Quali fra $U$, $V$ e $W$ sono sosttospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$?

b) Determinare basi per $U$ e $W$.

c) Determinare equazioni per $W$ e per $U \cap W$.

d) Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

e) Cosa rappresentano geometricamente $U$, $V$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$?

a) Per verificare se U, V e W sono sottospazi, occorre controllare se sono chiusi rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare

• U: un vettore generico di U è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix}$

verifico che è chiuso rispetto alla somma

$$\underset{U}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \frac{a_1+a_2}{2} \end{pmatrix}}} + \underset{U}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \frac{b_1+b_2}{2} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{b_1+b_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \frac{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)}{2} \end{pmatrix} \in U$$

verifico che è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare

$$\lambda \underset{U}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \frac{a_1+a_2}{2} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \frac{\lambda(a_1+a_2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \frac{\lambda a_1 + \lambda a_2}{2} \end{pmatrix} \in U$$

U è dunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

• V: un vettore generico di V è $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1+t \end{pmatrix}$

CONTROLLO SE ~~[illegible]~~ è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare



$$\lambda \underset{V}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1+t \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \lambda t \\ -\lambda t \\ \lambda(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda t \\ -\lambda t \\ \lambda + \lambda t \end{pmatrix} \notin V$$

Poiché V non è chiuso rispetto a questa operazione non è un sottospazio vettoriale.
(BASTA PRENDERE $\lambda \neq 1$)

• W: Possiamo osservare che $(2,1,1)$ è una combinazione lineare dei vettori $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$, i quali sono invece linearmente indipendenti; pertanto $Span((1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)) = Span((1,0,1),(1,1,0))$

~~Posto~~ Quindi un vettore generico di W è ~~[illegible]~~ $(x_1+x_2, x_2, x_1)$

PER DEFINIZIONE LO SPAN DI UN NUMERO FINITO DI VETTORI È UN SOTTOSPAZIO. VOLENDO UNA VERIFICA DIRETTA,

verifico che è chiuso rispetto alle somme

$$\underset{\in W}{\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}} + \underset{\in W}{\begin{pmatrix} b_1+b_2 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 \\ a_2+b_2 \\ a_1+b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ a_2+b_2 \\ a_1+b_1 \end{pmatrix} \in W$$

verifico che è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare

$$\lambda \underset{\in W}{\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1+a_2) \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda a_2 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_1 \end{pmatrix} \in W$$

Dunque W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

b) Dal vettore generico di U: $(x_1, x_2, \frac{x_1+x_2}{2})$ ricaviamo che

~~[illegible]~~ $(x_1, x_2, \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}) = (x_1, 0, \frac{x_1}{2}) + (0, x_2, \frac{x_2}{2}) =$

$= x_1(1, 0, \frac{1}{2}) + x_2(0, 1, \frac{1}{2}) \rightarrow U = Span((1,0,\frac{1}{2}), (0,1,\frac{1}{2}))$

$(1,0,\frac{1}{2}) = u_1$ $\quad (0,1,\frac{1}{2}) = u_2$ $\quad \{u_1, u_2\}$ sono una base per U

Come visto prima, $W = Span((1,0,1),(1,1,0))$

$(1,0,1) = w_1$ $\quad (1,1,0) = w_2$ Dato che $w_1$ e $w_2$ sono linearmente indipendenti, $\{w_1, w_2\}$ sono una base per W

c) Trovo le equazioni di W costruendo una matrice che ha come colonne ~~la~~ I VETTORI DI UNA base di W e mettendola a sistema con le incognite

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{array}\right)$$ attraverso l'eliminazione gaussiana $\rightarrow$ $R_1 \leftrightarrow R_3$ $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_1 \end{array}\right)$$ $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 - x_3 \end{array}\right)$$ $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - x_3 - x_2 \end{array}\right)$$

L'equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ è l'equazione di W

Costruendo un sistema con l'equazione di U, si ottengono le equazioni di $U \cap W$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$ *

P. 5

CONTINUA DIETRO ...

* ESERCIZIO 1

d) Per trovare la dimensione di $U+W$ è sufficiente costruire una matrice con i vettori delle loro basi e verificare quanti sono linearmente indipendenti: questi sono una base per $U+W$ e dunque indicano la sua dimensione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ attraverso l'eliminazione gaussiana $\xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_1}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$R_3 - \frac{1}{2}R_2$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice ha 3 pivot, 3 vettori sono linearmente indipendenti e $\dim(U+W) = 3$ ✓

Per trovare $\dim(U \cap W)$ possiamo utilizzare la formula di Grassmann:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$

$$2 + 2 = 3 + \dim(U \cap W) \quad \checkmark \quad \dim(U \cap W) = 1$$ ✓

e) Geometricamente, $U$ e $W$ sono due piani che ~~non~~ passano per l'origine, $V$ è una retta che non passa per l'origine, $U+W$ è proprio $\mathbb{R}^3$, ~~e~~ $U \cap W$ è una retta che passa per l'origine ✓

p. 7

**Esercizio 2.** (a) Dire per quali valori del parametro $k$ in $\mathbf{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 3 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di $k$ in $\mathbf{R}$, la matrice $A_k$ sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $L$ da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$.

Determinare, al variare di $k$ in $\mathbf{R}$, la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di $L$ che per il nucleo di $L$.

(c) Sia $k_0$ il valore di $k$ per cui $A_k$ risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare $k_0$ determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per $A_{k_0}$.

È possibile diagonalizzare $A_{k_0}$ mediante una matrice ortogonale?

a) Una matrice è invertibile se ammette un'inversa, quindi se det$(A_k) \neq 0$. Calcolo il determinante di $A_k$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & k+2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_k) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & k+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(3 \cdot 0 - 1(k+2)) = k+2$$

La matrice è invertibile per $k \neq -2$, non invertibile per $k = 2$

L'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{4}{k+2} & \frac{-3}{k+2} & \frac{-3}{k+2} \end{pmatrix}$ * IL PUNTO B SI TROVA ALLA PROSSIMA PAGINA ~~PAG. 3~~

c) $k_0 = -2$

$$A_{k_0} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare gli autovalori bisogna porre det$(A_{k_0} - \lambda I) = 0$

$$\det(A_{k_0} - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda[-\lambda(1-\lambda) - 3] =$$

$$= -\lambda[-\lambda + \lambda^2 - 3] = -\lambda[\lambda^2 - \lambda - 3] = 0 \quad 5$$

$$\lambda = \frac{+1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \frac{+1+\sqrt{13}}{2}$

$\lambda_3 = \frac{+1-\sqrt{13}}{2}$

dato che abbiamo 3 autovalori distinti, $A_{k_0}$ si può ridurre a una matrice diagonale

*ESERCIZIO 3 (P.8)

b) Dalla matrice ricaviamo che

$L_A(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $L_A(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L_A(e_3) = \begin{pmatrix} k+2 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$

Dunque $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y + z(k+2) \\ x+y \\ x+z(k+2) \end{pmatrix}$

Per trovare le equazioni per il nucleo costruiamo il sistema

$\begin{cases} 3y + z(k+2) = 0 \\ x+y = 0 \\ x+z(k+2) = 0 \end{cases}$ $x = -y$ $\begin{matrix} 3y + z(k+2) = 0 \\ -y + z(k+2) = 0 \end{matrix}$

$3y = -y$ $4y = 0$ $y = 0$ $x = 0$

$z(k+2) = 0$ Se $k \neq -2$ $z = 0$ pertanto il nucleo di $L_A$ ha dimensione 0, è un punto e si tratta dell'origine. Le sue equazioni sono $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. L'immagine invece

per la formula $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)) + \dim(\ker(L_A))$, ha dimensione 3 ed è tutto $\mathbb{R}^3$, ha quindi equazione $0 = 0$ e una base può essere quella canonica.

Se $k = -2$ si ha $0z = 0$, pertanto il sistema ha infinite soluzioni. Le equazioni per il nucleo sono $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ e una base è $\{(0,0,1)\}$

L'immagine ha dimensione:

$\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(L_A)) = 3 - 1 = 2$

Trovo le equazioni per l'immagine di $L_A$ con $k = -2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ -1 & 3 & 0 & z \end{array}\right)$ $R_1 \leftrightarrow R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & 0 & x \\ -1 & 3 & 0 & z \end{array}\right)$ $R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & 0 & x \\ 0 & 4 & 0 & z+y \end{array}\right)$ $R_3 \rightarrow 3R_3 - 4R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 3z+3y-4x \end{array}\right)$

L'equazione per $\mathrm{Im}(L_A)$ è: $4x - 3y - 3z = 0$

Una base è $\{(3,4,0),(3,0,4)\}$

Trovo l'autovettore relativo a $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ attraverso l'eliminazione gaussiana $\rightarrow$ $R_1 \to R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 + R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - \frac{4}{3} R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

P. 9

$3y=0 \quad x=0 \quad z$ è un parametro

l'autovettore associato a $\lambda=0$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$ attraverso l'eliminazione di gaussiana

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 3 & 0 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

SICCOME DET $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 3 \end{pmatrix} = 0$ LE PRIME DUE RIGHE DELLA MATRICE SONO DIPENDENTI, QUESTO IMPLICA CHE, CON L'ELIMINAZIONE DI GAUSS, LA MATRICE SI TRASFORMA IN

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -1 & 3 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 3+\frac{1-\sqrt{13}}{2} & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 7-\sqrt{13} & -1-\sqrt{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LUNGO $z = 7-\sqrt{13} \quad y = -\frac{z(-1-\sqrt{13})}{7-\sqrt{13}} = 1+\sqrt{13}$

$x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{13})\,y = \frac{1}{2}(1-13) = -6$

QUINDI UN AUTOVALORE RELATIVO A $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ È

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 1+\sqrt{13} \\ 7-\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

~~GLI AU~~ UN AUTOVALORE PER $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ SI CALCOLA NELLO STESSO MODO.

MI SCUSO PER I CALCOLI NECESSARI A RISOLVERE QUEST'ULTIMA PARTE. L'ESERCIZIO ERA STATO PREPARATO IN MODO CHE NON VENISSERO TROPPI CALCOLI, PROBABILMENTE HO COMMESSO UN ERRORE DI DIGITAZIONE.