Esercizio 0. Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

a) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori $v_1 = (0,0,0,4)$ e $v_2 = (0,4,0,0)$? Se sì, determinare almeno due basi di $\mathbb{R}^4$ che contengono v_1 e v_2.

Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori $w_1 = (1,2,3,4)$ e $w_2 = (2,4,6,8)$? Se sì, determinare almeno due basi di $\mathbb{R}^4$ che contengono w_1 e w_2.

PER IL TEOREMA DEL COMPLETAMENTO UN INSIEME DI VETTORI LIN. INDIP. DI UNO SPAZIO VETTORIALE V PUO' ESSERE COMPLETATO IN MODO DA DIVENTARE UNA BASE DI V. PER OTTENERLA CONSIDERIAMO L'INSIEME DI GENERATORI FORMATI DA $\{V_1, V_2\} \cup \mathcal{B}$, IN CUI $\mathcal{B}$ E' UNA BASE DI V. $\{V_1, V_2\} \cup \mathcal{B}$ GENERA V IN QUANTO CONTIENE UNA BASE. L'ULTIMO PASSO E' ESTRARRE UNA BASE $\mathcal{B}'$ DA $\{V_1, V_2\} \cup \mathcal{B}$ DETERMINANDO I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DEL SISTEMA DI GENERATORI.

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ PER COMPLETARLO UNIAMO L'INSIEME ALLA BASE CANONICA $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ E DETERMINIAMO SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI RISOLVENDO IL SISTEMA

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&4&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 4&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 4&0&0&0&0&1&0\\ 0&4&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{4}&0&0&0&0&1&0\\ 0&\boxed{4}&0&1&0&0&0\\ 0&0&\boxed{1}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\boxed{1}&0&0 \end{array}\right)$$

IL SISTEMA CI DICE CHE L'INSIEME DI GENERATORI $\{V_1, V_2, e_1, e_3\}$ E' UNA BASE.
ANALOGAMENTE CONSIDERANDO UN'ALTRA BASE $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ SI HA CHE

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0&0&2&0&0&0&0\\ 0&4&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0\\ 4&0&0&0&0&2&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 4&0&0&0&0&2&0\\ 0&4&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{4}&0&0&0&0&2&0\\ 0&\boxed{4}&0&2&0&0&0\\ 0&0&\boxed{2}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\boxed{2}&0&0 \end{array}\right)$$ E QUINDI

UN'ALTRA BASE CONTENENTE $\{V_1; V_2\}$ E' $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\4\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

~~LO STESSO DISCORSO VALE PER~~ $\cancel{\{W_1, W_2\}}$ L'INSIEME $\{W_1; W_2\}$ NON E' LINEARMENTE INDIPENDENTE POICHE' $W_2 = 2W_1$ E DUNQUE NON SI PUO' COMPLETARE A UNA BASE DI V, PERCHE' AGGIUNGENDO DEI VETTORI A $\{w_1, w_2\}$ SI OTTERRA' SEMPRE UN INSIEME LINEARMENTE DIPENDENTE.

b) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici. Che relazione esiste fra questi determinanti? Spiegare il motivo di questa relazione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET}\,A = \text{DET}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PRIMA DI USARE LAPLACE USO LA TRASFORMAZIONE $R_3 \to R_3 + R_1$ CHE NON CAMBIA IL DETERMINANTE

$$\text{DET}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

USO LAPLACE RISPETTO L'ULTIMA ~~RIGA~~ RIGA

$$-2\,\text{DET}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -2(-3-2) = 10$$

$\text{DET}\,B = -10$ POICHE' LA MATRICE B HA LE RIGHE R_1 E R_2 SCAMBIAT RISPETTO A A E IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE Y CON RIGHE O COLONNE SCAMBIATE RISPETTO A UN'ALTRA X E' $\text{DET}\,Y = -\text{DET}\,X$

ANALOGO DISCORSO VALE PER C CHE HA LE RIGHE R_2 E R_3 SCAMBIATE RISPETTO A B QUINDI

$$\text{DET}\,C = -\text{DET}\,B = \text{DET}\,A = 10$$

LA MATRICE D E' STATA OTTENUTA DALLA MATRICE C MOLTIPLICANDO LA TERZA RIGA PER 3. ~~[illegible]~~ IL DETERMINANTE HA LA PROPRIETA' CHE SE Y E' UNA MATRICE OTTENUTA MOLTIPLICANDO UNA RIGA O UNA COLONNA PER UNO SCALARE K ~~[illegible]~~ DI UNA MATRICE X ALLORA $\text{DET}\,Y = K\,\text{DET}\,X$.
PER QUESTA PROPRIETA' $\text{DET}\,D = 3\,\text{DET}\,C = 30$

c) (i) Determinare in $\mathbb{R}^3$ una retta r_1 che passa per il punto P di coordinate $(1, 2, -3)$ ed è perpendicolare al piano π di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 2$. Determinare l'intersezione fra r_1 e π.

(ii) Determinare una retta r_2 che passa per il punto P di coordinate $(1, 2, -3)$ ed è perpendicolare ed incidente alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

(iii) Determinare la posizione relativa di r_1 e r_2.

I) DETERMINO L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI r_1:

- ESSENDO $r_1 \perp \pi$ E IL VETTORE NORMALE AL PIANO π $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, UNO DEI VETTORI DIREZIONE DELLA RETTA $\vec{v}_1^D$ E' $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- VISTO CHE $P \in r_1$ L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI r_1 E'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

PER TROVARE L'INTERSEZIONE TRA r_1 E π SOSTITUISCO LE COORDINATE DEL PUNTO GENERICO DI r_1 NELL'EQUAZIONE DI π:

$$1+t+2+t+1+t=0 \qquad 3t=-4 \qquad t=-\frac{4}{3}$$

PERCIÒ IL PUNTO Q DI INTERSEZIONE E' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{4}{3} \\ 2-\frac{4}{3} \\ -3+\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

b)ii) TROVO L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1+x_3=-1 \end{cases}$ C(ii)

$$\begin{cases} x_2=2-x_1 \\ x_3=-1-x_1 \end{cases} \quad r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t'$$

$r \perp r_2$ SOLO SE $\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle = 0$ ($\vec{v}$ VETTORE DIREZIONE DI r E $\vec{v}_2$ DI r_2)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \alpha-\beta-\gamma=0 \qquad \alpha=\beta+\gamma$$

ORA USO LA CONDIZIONE DI INCIDENZA

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t' \qquad r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta+\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} t''$$

SI HA IL SISTEMA

$$\begin{cases} t' = 1 + (\beta+\gamma)t'' \\ 2-t' = 2+\beta t'' \\ -1-t' = -3+\gamma t'' \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\beta-\gamma & 1 \\ -1 & -\beta & 0 \\ -1 & -\gamma & -2 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2+R_1$; $R_3 \to R_3+R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\beta-\gamma & 1 \\ 0 & -2\beta-\gamma & 1 \\ 0 & -\beta-2\gamma & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\beta-\gamma & 1 \\ 0 & -2\beta-\gamma & 1 \\ 0 & -3\beta-3\gamma & 0 \end{array}\right)$$

IL SISTEMA È COMPATIBILE SE E SOLO SE $-3\beta-3\gamma=0$

E QUINDI SE $\beta=-\gamma$

DUNQUE IL VETTORE DIREZIONE DI r_2 È $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ E QUINDI IMPONENDO $\gamma=-1$ ~~SE $\gamma=-$~~

$$r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t''$$

c)III) CHIARAMENTE r_1 E r_2 SONO INCIDENTI AVENDO P IN COMUNE,

NON SONO COINCIDENTI POICHÉ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ NON È PROPORZIONALE A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

QUINDI SONO INCIDENTI

d) Sia L_1 l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$ che ha per matrice associata, rispetto alle basi canoniche:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia L_2 l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata, rispetto alle basi canoniche:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se è possibile calcolare $L_1 \circ L_2$ e, in caso affermativo, determinare la matrice associata a $L_1 \circ L_2$ rispetto alle basi canoniche, specificando esplicitamente quale è lo spazio di partenza, e quale è lo spazio di arrivo.

Dire se è possibile calcolare $L_2 \circ L_1$, e, in caso affermativo, determinare la matrice associata a $L_2 \circ L_1$ rispetto alle basi canoniche, specificando esplicitamente quale è lo spazio di partenza, e quale è lo spazio di arrivo.

$L_1 \circ L_2$ NON È CALCOLABILE . PERCHÈ IL CODOMINIO DI L_2 È $\mathbb{R}^3$ NON COINCIDE COL DOMINIO DI L_1 (DEL RESTO, NON SI PUÒ CALCOLARE IL PRODOTTO TRA UNA MATRICE 2×4 MOLTIPLICATA PER UNA 3×2 IN QUESTO ORDINE)

$L_2 \circ L_1$ È CALCOLABILE PERCHÈ IL CODOMINIO DI L_1 È $\mathbb{R}^2$ CHE COINCIDE COL DOMINIO DI L_2 (DEL RESTO, $A_2 \cdot A_1$ È DEFINITO)

LA MATRICE ASSOCIATA A $L_2 \circ L_1$ È IL PRODOTTO DELLE MATRICI $A_2 \cdot A_1$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

LA FUNZIONE $L_2 \circ L_1$ HA DOMINIO $\mathbb{R}^4$ E CODOMINIO $\mathbb{R}^3$

$$L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato da $(1,0,0,1), (-1,1,1,1), (0,1,-1,2)$ e il sottospazio

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Determinare basi per U, W, $U + W$ e $U \cap W$.

DATO CHE $U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\}$ VERIFICO SE QUESTO INSIEME DI GENERATORI E' UNA BASE E NELLO STESSO TEMPO NE TROVO LE EQUAZIONI CHE MI SERVIRANNO PER CALCOLARE LA BASE DI $U \cap W$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & x_4 \end{array}\right)$$

(RAPPRESENTO IN UN ALTRO MODO IL SISTEMA PER COMODITA')

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\} = \mathcal{B}_U$ SONO BASE DI U PERCHE' LIN. INDIP.

L'EQUAZIONE DI U E' $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$

PER TROVARE UNA BASE DI W RISOLVO IL SISTEMA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} x_4$$

DUNQUE UNA BASE PER W E' $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

1.1

Per trovare una base per U+W estraggo una base dall'insieme di generatori $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ poiché $U+W = \mathrm{Span}\{\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W\}$

(Il secondo vettore di $\mathcal{B}_W$ sta già in $\mathcal{B}_U$ e quindi non lo considero)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to 3R_3 - R_2 \\ R_4 \to 3R_4 - R_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 5R_4 + R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

Una base per $\mathcal{B}_{U+W}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi $\mathrm{Dim}(U+W) = 4$

Se un sottospazio ha la stessa dimensione di uno spazio vettoriale allora il sottospazio è lo spazio stesso $U+W = V$

Per la formula di Grassman $\mathrm{Dim}(U \cap W) = \mathrm{Dim}\, U + \mathrm{Dim}\, W - \mathrm{Dim}(U+W)$

$$\mathrm{Dim}(U \cap W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

In questo caso notiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è sia in $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ quindi è una base per $U \cap W$ poiché $\mathrm{Dim}(U \cap W) = 1$

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Come base di $\mathcal{B}_{U+W}$ potevo prendere una qualsiasi base di V)

[In questo caso particolare, facendo il ragionamento sopra, si vede che stavolta non era necessario trovare equazioni per U]

Esercizio 2. Determinare gli autovalori della seguente matrice, e determinare la loro molteplicità algebrica.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare, per ciascun autospazio, la dimensione, una base e un insieme di equazioni.

Dire se la matrice è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare la forma diagonale e una matrice diagonalizzante.

Dire se la matrice è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale (non si richiede di trovare l'eventuale matrice diagonalizzante ortogonale).

PER DETERMINARE GLI AUTOVALORI STUDIAMO LE RADICI DEL POLINOMIO

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I_5)=0$$

$$\mathrm{DET}\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

USANDO LAPLACE SI HA CHE

$$= -(2+\lambda)\,\mathrm{DET}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda)\,\mathrm{DET}\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

PRIMA DI PROCEDERE ANCORA CON LAPLACE USO DUE OPERAZIONI ELEMENTAR

$$R_3 \to R_3 - R_1$$

$$-(2+\lambda)(1-\lambda)\,\mathrm{DET}\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{\Longrightarrow} -(2+\lambda)(1-\lambda)\,\mathrm{DET}\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -\lambda \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -(2+\lambda)(1-\lambda)(2+\lambda)\left[2+\lambda(-1-\lambda)\right] =$$

$$= -(2+\lambda)^2(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(2+\lambda)^3(1-\lambda)^2 = 0$$

2, 1

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda=1$ $\lambda=-2$ CON $m_a(1)=2$ $m_a(-2)=3$

TROVO L'AUTOSPAZIO DI $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_5 \to 2R_5+R_3]{R_4 \to 2R_4+R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_5 \to R_5+R_4}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}]{R_3 \to R_3+R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

~~$x_4=0$ x_3 x_5~~ LE EQUAZIONI DELL'AUTOSPAZIO SONO $\begin{cases} x_1=0 \\ x_3-x_5=0 \\ x_4-x_5=0 \end{cases}$

E UNA BASE È $\mathcal{B}_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ E $\mathrm{Dim}\, V_1=2$

ORA L'AUTOSPAZIO DI $\lambda=-2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_5 \to R_5-R_3]{R_4 \to R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LE EQUAZIONI SONO $\begin{cases} x_2=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ E UNA BASE $\mathcal{B}_{-2}$ È $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

LA MATRICE ~~...~~ È DIAGONALIZZABILE POICHÉ $m_a(1)=m_g(1)=2$ E $m_a(-2)=m_g(-2)=3$ E LA MATRICE DIAGONALE È

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE DIAGONALIZZANTE È $\left(D=C^{-1}\cdot A\cdot C\right)$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE È DIAGONALIZZABILE MEDIANTE UNA MATRICE ORTOGONALE POICHÉ È SIMMETRICA

2.2