(1) (a) Dire per quali valori del parametro k in $\mathbf{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & k+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di k in $\mathbf{R}$, la matrice A_k sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare L da $\mathbf{R^3}$ a $\mathbf{R^3}$.

Determinare, al variare di k in $\mathbf{R}$, la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di L che per il nucleo di L.

(c) Sia k_0 il valore di k per cui A_k risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare k_0 determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per A_{k_0}.

È possibile diagonalizzare A_{k_0} mediante una matrice ortogonale?

(2) In $\mathbf{R}^3$, si considerino le rette r_1 di equazione

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

r_2 di equazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

ed r_3 di equazione

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

Determinare la posizione relativa (incidenti, parallele, sghembe o coincidenti) fra: (a) r_1 ed r_2. (b) r_1 ed r_3. (c) r_2 ed r_3.

(3) (a) Si consideri l'applicazione L_1 da $\mathbf{R^3}$ a $\mathbf{R^2}$ definita da

$$L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

Verificare che L_1 è un'applicazione lineare.

(b) Si consideri ora l'applicazione lineare L_2 da $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R^3}$ che ha per matrice associata, rispetto alle basi canoniche:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare sia $L_1 \circ L_2$ che $L_2 \circ L_1$, specificando esplicitamente, per ciascuna di queste applicazioni, quale è lo spazio di partenza, e quale è lo spazio di arrivo.