

- (1) (a) Dire per quali valori del parametro  $k$  in  $\mathbf{R}$ , la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & k-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

(b) Si supponga che, al variare di  $k$  in  $\mathbf{R}$ , la matrice  $A_k$  sia la matrice associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare  $L$  da  $\mathbf{R}^3$  a  $\mathbf{R}^3$ .

Determinare, al variare di  $k$  in  $\mathbf{R}$ , la dimensione, un insieme di equazioni, e una base sia per l'immagine di  $L$  che per il nucleo di  $L$ .

(c) Sia  $k_0$  il valore di  $k$  per cui  $A_k$  risulta non invertibile.

Per quest'unico valore particolare  $k_0$  determinare autovalori, autovettori e, se possibile, una matrice diagonalizzante e una forma diagonale per  $A_{k_0}$ .

È possibile diagonalizzare  $A_{k_0}$  mediante una matrice ortogonale?

- (2) In  $\mathbf{R}^3$ , si considerino le rette  $r_1$  di equazione

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

$r_2$  di equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

ed  $r_3$  di equazione

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare la posizione relativa (incidenti, parallele, sghembe o coincidenti) fra:

- (a)  $r_1$  ed  $r_2$ .
- (b)  $r_1$  ed  $r_3$ .
- (c)  $r_2$  ed  $r_3$ .

- (3) (a) Si consideri in  $\mathbf{R}^5$  il sottoinsieme  $\Sigma = \{(x, y, z, v, w) \mid \text{esistono } s, t \in \mathbf{R} \text{ tali che } x + y + z + v + w = t, x - y + z - v - w = s + 1 \text{ e } z = t + s\}$ .

- (a<sub>1</sub>) Cosa rappresenta  $\Sigma$ ?
- (a<sub>2</sub>)  $\Sigma$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^5$ ?
- (a<sub>3</sub>)  $\Sigma$  è un'iperquadrica in  $\mathbf{R}^5$ ?

(b) Si consideri in  $\mathbf{R}^5$  il sottoinsieme  $\Sigma = \{(x, y, z, v, w) \mid \text{esistono } s, t \in \mathbf{R} \text{ tali che } x^2 = t, y^2 = s \text{ e } 1 = t + s\}$ .

- (b<sub>1</sub>) Cosa rappresenta  $\Sigma$ ?
- (b<sub>2</sub>)  $\Sigma$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^5$ ?
- (b<sub>3</sub>)  $\Sigma$  è un'iperquadrica in  $\mathbf{R}^5$ ?