(1) Determinare gli autovalori della seguente matrice, e determinare la loro molteplicità algebrica.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare, per ciascun autospazio, la dimensione, una base e un insieme di equazioni.

Dire se la matrice è diagonalizzabile. Dire se è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale. In caso affermativo, determinare la forma diagonale e una matrice diagonalizzante (se possibile, ortogonale).

(2) In $\mathbf{R}^3$, si considerino le rette r_1 di equazione

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

ed r_2 di equazione

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

(a) Verificare che r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Determinare equazioni per la retta r_3 perpendicolare ed incidente ad r_1 ed r_2.

(c) Determinare il punto di intersezione fra r_1 ed r_3; e determinare il punto di intersezione fra r_2 ed r_3.

(d) Determinare, se esiste, una retta r_4 che passi per $P(3, 3, 2)$, sia incidente a r_1 e sia incidente a r_2.

(3) Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determinare il volume del poliedro che ha per vertici v_1, v_2, v_3, v_4, cioè del poliedro

$$P = \{t_1(v_2 - v_1) + t_2(v_3 - v_1) + t_3(v_4 - v_1) | 0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1\}$$