2006

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Iperquadriche

Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$, non nulla, sia b un vettore colonnna in $\mathbf{R}^n$ e sia $c \in \mathbf{R}$. L'insieme delle soluzioni in $\mathbf{R}^n$ dell'equazione

$$X^t AX + X^t b + c = 0$$

si dice iperquadrica

Le iperquadriche in $\mathbf{R}^2$ si chiamano coniche, le iperquadriche in $\mathbf{R}^3$ si chiamano quadriche. Consideriamo la matrice A', $(n+1) \times (n+1)$ data da

$$A' = \begin{pmatrix} A & \frac{b}{2} \\ \frac{b^t}{2} & c \end{pmatrix}.$$

L'iperquadrica si dice non degenere se $detA' \neq 0$ e si dice degenere altrimenti.

2 Forma canonica metrica delle ipequadriche

Se in una iperquadrica $X^t AX + b^t X + c = 0$ facciamo la sostituzione $X = OY + v$ con O ortogonale otteniamo una nuova iperquadrica, $Y^t A'Y + b'^t Y + c' = 0$. se in fine dato un numero reale non nullo ρ sostituiamo c' con $\rho c'$ b' con $\rho b'$ ed A' con $\rho A'$ abbiamo moltiplicato per ρ ogni termine dell'equazione ed il luogo di zeri non cambia. In coclusione l' iperquadrica $Y^t \rho A'Y + \rho b'^t Y + \rho c' = 0$ si ottiene dall' iperquadrica originale con uno spostamento rigido di $\mathbf{R}^n$, (applicazione della trasformazione $X = OY + v$ con O ortogonale) e un riscalamento (moltiplicazione per ρ.) Vogliamo provare che ogni iperquadrica si puo' trasformare in forma semplice (forma canonica metrica) applicando trasformazioni del tipo sopra descritto

Teorema 2.1 *Attraverso spostamenti rigidi o riscalamenti ogni iperquadrica in $\mathbf{R}^n$ si puo' mettere in una delle tre forme seguenti*

Forma 1
$\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {x_2}^2 + \ldots + \lambda_k {x_k}^2 = 0$ *dove* $1 \leq k \leq n$ *e tutti i* λ_j *sono non nulli*
Forma 2
$\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {x_2}^2 + \ldots + \lambda_k {x_k}^2 = 1$ *dove* $1 \leq k \leq n$, *e tutti i* λ_j *sono non nulli*
Forma 3
$\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {x_2}^2 + \ldots + \lambda_k {x_k}^2 = x_n$ *dove* $1 \leq k \leq n-1$ *e tutti i* λ_j *sono non nulli.*

Elenco delle coniche in forma canonica metrica

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq 0 \;\; b \neq 0)$ ellisse reale (non degenere)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq 0 \;\; b \neq 0)$ iperbole (non degenere)

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ parabola (non degenere)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $(a \neq 0 \;\; b \neq 0)$ ellisse immaginaria, non ha punti in $\mathbf{R}^2$ (non degenere)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \neq 0 \;\; b \neq 0)$ coppia di rette incidenti (degenere)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \neq 0 \;\; b \neq 0)$ coppia di rette incidenti immaginarie (degenere)
ha in $\mathbf{R}^2$ il solo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ $(a \neq 0)$ coppia di rette parallele e distinte (degenere)

$\frac{x^2}{a^2} = 0$ $(a \neq 0)$ retta doppia (degenere)

Per quanto riguarda le quadriche in $\mathbf{R}^3$ in forma canonica, le forme generali sono le seguenti :

$$\begin{aligned} & \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ non tutti nulli}) \\ (1) \qquad & x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \\ & z = \alpha x^2 + \beta y^2 \quad (\alpha,\ \beta \text{ non entrambi nulli}). \end{aligned}$$

I tipi possibili di quadriche degeneri sono:

coni e cilindri reali o immaginari, coppie di piani incidenti o paralleli, reali o immaginari.

I cilindri corrispondono alle equazioni in (**??**) nelle quali qualche variabile non compare nell'equazione, cio' vuol dire che le variabili che non compaiono possono assumere qualunque valore. Si ottiene quindi un cilindro sopra l'oggetto geometrico descritto dall'equazione (pensato in uno spazio di dimensione inferiore). Ad esempio si puo' avere un cilindro sopra una circonferenza, oppure sopra una ellisse, oppure una coppia di piani che si puo' anche pensare come un cilindro sopra una coppia di rette.

I coni hanno equazioni del tipo $x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$.

Notiamo che un cono contiene sempre l'origine, e che se contiene un vettore non nullo v, contiene anche tutta la retta passante per l'origine con vettore direttore v.

I tipi possibili di quadriche non degeneri sono:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0)$ ellissoide reale

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0)$ ellissoide immaginario

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0 \; c \neq 0)$ iperboloide iperbolico, (cestino della carta)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0)$ iperboloide ellittico

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (a \neq 0 \; b \neq 0)$ paraboloide iperbolico (sella)

$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0)$ paraboloide ellittico

3 Descrizione geometrica delle coniche non degeneri a punti reali

Siano F_1 ed F_2 due punti di $\mathbf{R}^2$, l'ellisse e' descritta come il luogo dei punti p in $\mathbf{R}^2$ tali che la somme delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'ellisse. Notiamo che se i fuochi coincidono con un unico punto F si ottiene una circonferenza di centro F e raggio a. Similmente Dati due punti distinti F_1 ed F_2 in $\mathbf{R}^2$, l'iperbole e' descritta come il luogo dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P dai punti F_1 ed F_2 e' una costante positiva $2a$ diversa dalla distanza $2c$ tra F_1 ed F_2. I punti F_1 ed F_2 sono detti fuochi dell'iperbole.

Ricordiamo ora che per ogni terna di punti $P \; Q$ ed R in $\mathbf{R}^2$ vale la disuguaglianza triangolare $d(P,Q)+d(Q,R) \geq d(P,R)$. Da cio' segue che se P e' un punto dell' ellisse di fuochi F_1 ed F_2 vale la disuguaglianza

$$2a = d(F_1, P) + d(P, F_2) \geq d(F_1, F_2) = 2c$$

ma per ipotesi a non coincide con c percio' nel caso dell'ellisse abbiamo che $a > c$.

Se P e' invece un punto dell'iperbole con fuochi F_1 ed F_2 si ha

$$d(F_1, P) \leq d(F_1, F_2) + d(F_2, P)$$

e

$$d(F_2, P) \leq d(F_2, F_1) + d(F_1, P)$$

percio'

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2| \leq 2c$$

e poiche' a e c non coincidono nel caso del'iperbole abbiamo $a < c$.

Verifichiamo che si ottengono effettivamente l'ellisse e l'iperbole.

Nel caso dell'ellisse se scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che i fuochi stiano sull'asse x da parti opposte rispetto all'origine ed abbiano uguale distanza dall'origine, allora essi hanno coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ rispettivamente. La somma delle distanze del punto di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dai fuochi e'

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

e' la condizione descritta sopra diventa

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

facendo il quadrato e semplificando si trova

$$-\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=x^2+y^2+c^2-2a^2$$

il che implica che $x^2+y^2+c^2-2a^2 \leq 0$
e facendo ancora il quadrato si trova

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$$

Cioe'

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

o anche

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $a^2-c^2>0$ e $b=\sqrt{a^2-c^2}\leq a$.

Notiamo che se l'equazione **??** e' soddisfatta l'espressione $x^2+y^2+c^2-2a^2 = x^2+y^2-a^2-b^2 = a^2(1-\frac{y^2}{b^2})+y^2-a^2-b^2 = \frac{a^2b^2-a^2y^2+b^2y^2-a^2b^2-b^4}{b^2} = \frac{-(a^2-b^2)y^2-b^4}{b^2}$, e' minore o uguale a 0 poiche' $0\leq b\leq a$. Se in una ellisse $b\geq a$ ci si puo' sempre ricondurre al caso precedente applicando la trasformazione ortogonale $(x,y)\to(y,x)$.

Nel caso dell'iperbole in modo simile si trova

$$\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=x^2+y^2+c^2-2a^2$$

dal che si deduce che $x^2+y^2+c^2-2a^2\geq 0$,
e facendo ancora il quadrato

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$$

Cioe'

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ovvero

(5) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $a^2 - c^2 < 0$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Notiamo che se l'equazione **??** e' soddisfatta l'espressione $x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = x^2 + y^2 + b^2 - a^2 = a^2(1 + \frac{y^2}{b^2}) + y^2 - a^2 + b^2 = \frac{a^2b^2 + a^2y^2 + b^2y^2 - a^2b^2 + b^4}{b^2} = \frac{-(a^2+b^2)y^2 + b^4}{b^2}$, e' maggiore o uguale a 0.

Dato un punto F in $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ tale che F non appartiene a δ, la parabola e' descritta come il luogo dei punti P di $\mathbf{R}^2$ tali che $d(P,F) = d(P,\delta)$.

Infatti scegliamo il sistema di coordinate ortogonali in modo che la retta δ sia parallela all'asse x, in modo che F sia sul semiasse y positivo, che δ sia dalla parte opposta di F rispetto all asse x, ed in fine che la distanza di F dall'origine coincida con la distanza di δ dall'origine. Allora F ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ mentre δ ha equazione $x = \frac{-1}{4a}$ con a costante positiva opportuna. Se P ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ allora l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{4a})^2} = |y + \frac{1}{4a}|.$$

Quadrando e semplificando si ottiene

$$y = ax^2$$

Scegliamo ora un punto F di $\mathbf{R}^2$ ed una retta δ non contenente F ed un numero reale $e > 0$.

Consideriamo il luogo C dei punti P in $\mathbf{R}^2$ tali che

$$d(P,F) = e\ d(P,\delta)$$

Allora C e' una parabola se $e = 1$, e' una iperbole se $e > 1$ ed e' una ellisse con fuochi distinti (cioe' e' una ellisse che non e' una circonferenza) se $e < 1$. D'altra parte ogni iperbole, ogni parabola ed ogni ellisse diversa da una circonferenza si puo' ottenere in questo modo per una oppurtuna scelta di F di δ e di e.

Il caso $e = 1$ e' trattato sopra.

Nel caso $e \neq 1$ sia d la distanza di F da δ sia $c = \frac{d}{|e^2-1|}$ e sia $a = \frac{d}{e|e^2-1|}$. Abbiamo allora $a > 0$, $c > 0$ ed $e = \frac{c}{a}$. Scegliamo il sistema di cordinate in modo che l'asse x coincida con la retta passante per F e perpendicolare a δ. Orientiamo l' asse x nel verso che va da F verso δ se $e < 1$ e nel verso che va da δ verso F altrimenti. In fine scegliamo l'origine a distanza c da F in modo che il segmento dall'origine verso F sia orientato come l'asse x. Risulta allora che F ha coordinate $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ e δ ha equazione $x = \frac{a^2}{c}$.

L'equazione allora diventa

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\ |x - \frac{a^2}{c}|$$

facendone il quadrata e semplificando si trova

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 + c^2 = a^2$$

cioe'

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 + c^2 - a^2 = 0$$

o anche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

che coincide con l' equazione (**??**) se $a > c$ cioe' se $e < 1$ e con l'equazione (**??**) se $a < c$ cioe' se $e < 1$. Essendo $c > 0$ la curva non puo' mai essere una circonferenza.

4 coniche non degeneri a punti reali in coordinate polari

Fissato un sistema di coordinate polari nel piano

la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ ha equazione

$$\rho = r$$

Dato un numero $e > 0$ sia δ la retta di equazione cartesiana $x = h$ con $h > 0$. e sia F l'origine. Notiamo che F non appartiene a δ. Consideriamo la curva data dall'equazione $d(P, F) = ed(P, \delta)$. Notiamo che essendo $e > 0$ un punto di questa curva non puo' coincidere con F e non puo' appartenere a δ. In coordinate polari questa equazione diventa

$$\rho = e\ |h - \rho\cos(\theta)|$$

consideriamo separatamente due casi

caso 1) $h - \rho\cos(\theta) > 0$ e caso 2) $h - \rho\cos(\theta) < 0$.

Notiamo che se $e \leq 1$ per i punti della curva il caso 2) non si puo' presentare.

Infatti nel caso 2) l'equazione della curva diventa $\rho = e\ (\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho(1 - e\cos(\theta)) = -eh$$

D'altra parte se $e \leq 1$ deve essere $e\cos(\theta) \leq 1$ e quindi $1 - e\cos(\theta) \geq 0$ inoltre $\rho > 0$ mentre $-eh < 0$ percio' l' equazione sopra e' impossibile.

Se ne deduce che se $e \leq 1$ l'equazione della curva e'

$\rho = e\ (h - \rho\cos(\theta)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)} \tag{6}$$

Se $e < 1$ la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ e' sempre positiva e l'equazione (**??**) e' definita per $0 \leq \theta < 2\pi$. Questa e' l'equazione in coordinate polari di una ellisse che non sia una circonferenza.

Se $e = 1$ la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ si annulla per $\theta = \pi$ oppure $\theta = -\pi$ e l'equazione (**??**) e' definita per $-\pi < \theta < \pi$. Questa e' l 'equazione in coordinate polari di una parabola.

Se $e > 1$ entrambe le possibilita' 1) e 2) si possono presentare. Per $h - \rho\cos(\theta) < 0$ l'equazione diventa $\rho = e(\rho\cos(\theta) - h)$ cioe'

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}.$$

La quantita' $e\cos(\theta) - 1$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{1}{e}$. Sia allora θ_0 l'angolo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ tale che $\cos(\theta_0) = \frac{1}{e}$ e $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$. Per $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ abbiamo $e\cos(\theta) - 1 > 0$, percio' l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{e\cos(\theta) - 1}$$

e' definita per $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ e descrive un ramo dell'iperbole. Per $h - \rho\cos(\theta) > 0$ l'equazione e' $\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)}$ e la quantita' $1 + e\cos(\theta)$ si annula se $\cos(\theta) = \frac{-1}{e}$. Sia allora θ_1 l'angolo tra $\frac{\pi}{2}$ e π tale che $\cos(\theta_0) = \frac{-1}{e}$ e $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$, quindi $\theta_1 = \pi - \theta_0$. Per $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ abbiamo $1 + e\cos(\theta) > 0$, $\rho > 0$ ed $eh > 0$ percio' l' equazione

$$\rho = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)}$$

e' definita per $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ e descrive l'altro ramo dell'iperbole.

Sia $P \in \mathbf{R}^2$ il punto di coordinate polari $\rho = \frac{h}{e^2 - 1}$ e $\theta = 0$.

Notiamo che le semirette $\theta = \theta_0$ e $\theta = -\theta_1$ formano una retta r_1 passante per il fuoco, analogamente le semirette $\theta = \theta_1$ e $\theta = -\theta_0$ formano una retta r_2 passante per il fuoco. Le rette parallele ad r_1 ed r_2 passanti per il punto P sono allora gli asintoti dell'iperbole.