

Facoltà di Scienze

Appello 16-06-2008

COGNOME

NOME

CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

0. _____

1. _____

2. _____

Esercizio 0. Discutere e risolvere il maggior numero possibile dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte.

a) Discutere e risolvere il seguente sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \alpha(\alpha + 1)y = \alpha + 1 \end{cases}$$

b) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene i vettori $v_1 = (5, 0, 0)$ e $v_2 = (0, -3, 0)$? Se sì, determinarne una.

Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene i vettori $v_1 = (5, 5, 5)$ e $v_2 = (-3, -3, -3)$? Se sì, determinarne una.

- c)
1. Calcolare il prodotto vettoriale $w = v_1 \wedge v_2$, dove $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (2, -1, -3)$.
 2. Calcolare il prodotto scalare $\langle w, v_3 \rangle$, dove w è il vettore calcolato al punto precedente, e $v_3 = (-1, 1, -1)$.
 3. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- d) Determinare in $\mathbb{R}^3$ la distanza del punto P di coordinate $(1, 2, -3)$ dal piano di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ e dalla retta di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Esercizio 1. Calcolare, al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3k-2 & 1 & 2 & -3+3k \\ 3k & 2 & 4 & 3k-2 \\ -3k+4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\};$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \text{esiste } t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_1 = 1 + t, \ x_2 = -t, \ x_3 = t\};$$

$$W = \text{Span}((1, 1, 1), (1, 1, 0)).$$

- a) Quali fra U , V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$?
- b) Determinare una base per U .
- c) Determinare equazioni per W e per $U \cap W$.
- d) Cosa rappresentano geometricamente U , V , W e $U \cap W$?
- e) Determinare la posizione relativa fra V e $U \cap W$.